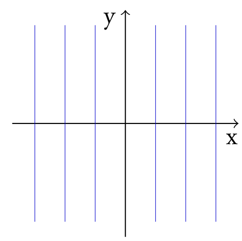
Några 1:a ordningens PDE

Exempel 1 För enkelhets skull börjar vi med ekvationer i $\mathbb{R}^2$ och vi startar med de enklaste. Lös

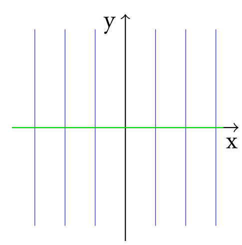
$$u'_y = 0 \tag{1}$$



Ekvationen säger att u ska vara konstant när vi går längs linjer $x = c$, det vill säga att u beror inte på y. Linjerna kallas *karakteristiska kurvor* för detta problem. Några är ritade med blått i figuren intill. Lösningarna kan skrivas

$$u(x, y) = \varphi(x)$$

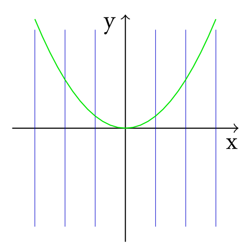
där φ är en godtycklig funktion. För att få en entydig lösning behövs information så att φ kan bestämmas. Ofta ges denna information som värden av u på en kurva som



$$u(x, 0) = x^2 \tag{2}$$

där värdena för u är preciserade på x-axeln. I figuren bredvid är x-axeln ritad i grönt. Villkoret (2) ger att $\varphi(x) = x^2$ och därmed att lösningen på problemet (1) och (2) ges av $u(x, y) = x^2$.

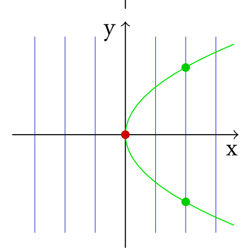
Andra varianter på villkor är



$$u(x, x^2) = x \tag{3}$$

där u preciseras på parabeln $y = x^2$ ritad i grönt här intill. En lösning på problemet (1) och (3) ges nu av $u(x, y) = x$.

Ger man däremot villkoret



$$u(x^2, x) = x \tag{4}$$

där u preciseras på parabeln $x = y^2$ inritad i figuren intill, så blir problemet (1) och (4) olösbart. För i till exempel punkten $(1, -1)$ är $u(1, -1) = -1$ men i $(1, 1)$ är $u(1, 1) = 1$ fast punkterna ligger på samma karakteristiska linje och därmed skulle u ha samma värde i båda punkterna.

Observera också att den sista parabeln har en punkt där kurvan tangerar den karakteristiska kurvan genom punkten, nämligen punkten $(0,0)$. Det är i den punkten parabeln vänder och därmed skapar problem med dubbla värden. I de båda tidigare fallen finns ingen sådan punkt. En kurva som har egenskapen att den inte i någon punkt är tangent till den karakteristiska kurva genom punkten kallas *icke-karakteristisk* och lämpar sig alltså att ge begynnelsevärden på.

Vi ser av detta enkla exempel att informationen om hur de karakteristiska kurvorna ser ut ger dels information om var lösningen är konstant, dels om var begynnelsevärden ska väljas. En metod att lösa denna typ av problem går ut på att starta i en punkt, hitta den karakteristiska kurvan som går genom punkten och följa den tills den skär den icke-karakteristiska kurvan där den sökta funktionens begynnelsevärden är givna och läsa av funktionens värde där. Man säger att i hyperboliska problem som detta, sprids informationen längs de karakteristiska kurvorna.

Exempel 2 Betrakta nu istället ekvationen

$$3u'_x + 4u'_y = 0. \tag{5}$$

Den kan skrivas

$$(3,4)\cdot(\partial_x u,\, \partial_y u) = (3,4)\cdot\nabla u = 0$$

och om man normerar vektorn $(3,4)$ till $\mathbf{v} = \frac{1}{5}(3,4)$ så kan man skriva ekvationen

$$\partial_{\mathbf{v}} u = \mathbf{v}\cdot\nabla u = 0$$

och den säger att riktningsderivata av u i riktningen $\mathbf{v}$ är 0 överallt, det vill säga att u varierar inte i riktningen $\mathbf{v}$. Här blir de karakteristiska kurvorna linjer med riktningskoefficient $\mathbf{v}$ som på parameterform kan skrivas

$$(x(\tau), y(\tau)) = (x_0, y_0) + \tau\mathbf{v}.$$

Observerat att linjens tangentvektor ges av

$$\partial_\tau(x(\tau), y(\tau)) = \mathbf{v}.$$

Parametriseringen

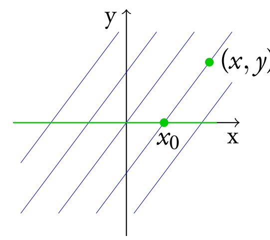
$$(x(t), y(t)) = (x_0, y_0) + t(3,4)$$

ger samma linje men med tangentvektor $(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (3, 4)$ som är parallell med $\mathbf{v}$. De karakteristiska linjerna får på normalform ekvationerna $4x - 3y = c$ för olika c, och normalvektorn $(4, -3)$ är vinkelrät mot tangentvektorn $(3, 4)$.

I problemet

$$\begin{cases} 3u'_x + 4u'_y = 0, \\ u(x, 0) = x^2, \end{cases} \tag{6}$$

där begynnelsevärdena är givna på x-axeln (linjen $y = 0$, passar det bra att välja punkterna (x_0, y_0) på x-axels, det vill säga sätta $y_0 = 0$. Problemet kan nu lösas genom att man startar i en punkt (x, y) och sen följer den karakteristiska linjen given av $(x(t), y(t)) = (x_0, 0) + t(3, 4)$ tills den skär x-axeln i x_0. Där läser man av att



$$u(x, y) = u(x_0, 0) = x_0^2$$

och det återstår att beräkna hur x_0 beror på punkten (x, y). Det gäller att hitta t och x_0 så att $(x, y) = (x(t), y(t)) = (x_0, 0) + t(3, 4)$, det vill säga lösa systemet

$$\begin{cases} x = x_0 + 3t, \\ y = 0 + 4t, \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} t = y/4, \\ x_0 = x - \frac{3}{4}y, \end{cases}$$

vilket ger att

$$u(x, y) = \left(x - \tfrac{3}{4}y\right)^2$$

löser problemet (6), något som är enkelt att kontrollera.

Metoden kan generaliseras om vi först observerar att för att bestämma de karakteristiska linjerna behöver vi veta dels tangentvektor (riktningsvektor) given av $(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (3, 4)$ och dels startpunkt här given av $(x(0), y(0)) = (x_0, 0)$.

Exempel 3 Nu studerar vi problemet

$$\begin{cases} 2y\,\partial_x u + \partial_y u = 0, \\ u(x, 0) = x^2, \end{cases} \tag{7}$$

och vi börjar med att försöka hitta de karakteristiska kurvorna γ på parameterform $(x(t), y(t))$. Grundidén är att tangenten till γ, $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$, hela tiden ska vara lika med riktningen som den PDE deriverar i, det vill säga i riktningen $(2y, 1)$. Som startpunkt för γ tar vi en punkt på kurvan där begynnelsevillkoret ges och som vi nu skriver $u(x_0, 0) = x_0^2$. Startvillkoret kan alltså skrivas $(x(0), y(0)) = (x_0, 0)$. Sammantaget ges de karakteristiska kurvorna av följande system av ODE

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y, & x(0) = x_0, \\ \dot{y} = 1, & y(0) = 0. \end{cases}$$

Innan vi löser detta och som en förberedelse för mer allmänna problem, studerar vi hur den sökta funktionen u varierar längs den karakteristiska kurvan, med andra ord hur

$$z(t) = u(x(t), y(t))$$

beror på parametern t. Kedjeregeln ger tillsammans med PDE att

$$\dot{z} = \partial_x u \dot{x} + \partial_y u \dot{y} = 2y \partial_x u + \partial_y u = 0$$

vilket som vi ville innebär att z är konstant och har hela tiden samma värde som det värde den har vid starten och som ges av begynnelsevillkoret

$$z(0) = u(x(0), y(0)) = u(x_0, 0) = x_0^2.$$

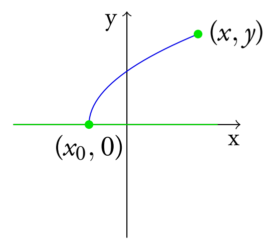
Trots att vi redan vet vad z är tar vi med villkoren i följande formulering. Det givna PDE problemet (7) kan reduceras till ett system av ODE

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y, & x(0) = x_0, \\ \dot{y} = 1, & y(0) = 0, \\ \dot{z} = 0, & z(0) = x_0^2, \end{cases}$$

där $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ är den karakteristiska kurvan genom $(x_0, 0)$ på parameterform och $z(t)$ är hur funktionen u varierar längs den karakteristiska kurvan. Vi har redan konstaterat att $z(t) = x_0^2$ hela tiden och det är lätt att se att $\dot{y} = 1$ ger $y(t) = t + c_1$ och begynnelsevillkoret $y(0) = 0$ medför att $y(t) = t$. Insatt i ekvationen för x blir denna $\dot{x} = t$ varför $x(t) = t^2 + c_2$ och begynnelsevillkoret $x(0) = x_0$ ger $x(t) = t^2 + x_0$. Sammanfattningsvis kan lösningen skrivas

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + x_0, \\ y(t) = t, \\ z(t) = x_0^2. \end{cases}$$

För att på lösningen på en form utan parametrarna t och x_0 försöker man bestämma så att den karakteristiska kurvan går genom en given punkt (x, y), det vill säga man försöker lösa systemet

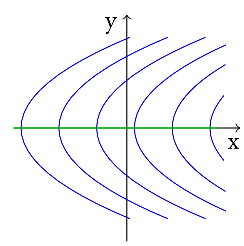


$$\begin{cases} x = x(t) = t^2 + x_0, \\ y = y(t) = t, \end{cases} \iff \begin{cases} t = y, \\ x_0 = x - y^2. \end{cases}$$

Ur detta läser vi av att

$$u(x, y) = z = x_0^2 = (x - y^2)^2$$

som är vår sökta lösning på det givna problemet (7).
Vi ser också av räkningarna att de karakteristiska kurvorna är parablerna $s = x - y^2$ för olika reella tal s. En annan möjlighet att lösa problemet (7) är att byta koordinater enligt



$$\begin{cases} s = x - y^2, \\ t = y \end{cases}$$

vilket med hjälp av kedjeregeln transformerar det givna problemet till det nya

$$\begin{cases} u'_t = 0, \\ u(s, 0) = s^2, \end{cases}$$

vilket är det enkla problem vi löste i Exempel 1 nämligen (1) och (2) fast i variablerna s och t istället för x och y. Lösningen blir nu $u(s, t) = s^2$ vilket i de ursprungliga koordinaterna kan skrivas $u(x, y) = (x - y^2)^2$.

Allmänt Metoden kan användas generellt till att lösa problem som

$$\begin{cases} \alpha\, u'_x + \beta\, u'_y = f, \\ u(x_0, y_0) = u_0(x_0, y_0), \quad \text{för } g(x_0, y_0) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Funktionerna u_0 och g antas givna, där g används för att specificera kurvan där begynnelsevärdena är givna. Till exempel ger funktionen $g(x, y) = y$ villkoret $y_0 = 0$ det vill säga villkor på x-axeln. Funktionerna α, β och f får bero på x, y och till och med u

som vi då kallar z (men inte på derivator av u). PDE av denna typ kallas *kvasilinljära*. Problemet (8) reduceras till ett system av ODE

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(x, y, z), & x(0) = x_0, \\ \dot{y} = \beta(x, y, z), & y(0) = y_0, \\ \dot{z} = f(x, y, z), & z(0) = u_0(x_0, y_0), \end{cases}$$

som vi vid handräkning med lite tur och skicklighet kan lösa. Detta ger de karakteristiska kurvorna på parameterform $(x(t), y(t))$ samt hur $u = z(t)$ varierar längs de karakteristiska kurvorna. Löser vi sedan ut parametrarna t samt x_0 och y_0 genom att lösa systemet

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ g(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

får vi uttryck för hur parametrarna beror på x och y och sätter vi in dessa uttryck i $u = z(t)$ får vi lösningen $u(x, y)$.

Observera att (8) inte täcker in alla 1:a ordningens PDE. Till exempel

$$|\nabla u|^2 = (u_x')^2 + (u_x')^2 = 1$$

går inte att lösa med dessa metoder.

Övningar

I de tre första övningarna används de oberoende variablerna t och x istället för x och y för att illustrera likheterna med lösningar till vågekvationen.

Övning 1 Skissa lösningen vid $t = 0$ och $t = 3$ till problemet

$$u'_t + 2\,u'_x = 0, \qquad u(0,x) = \max(1 - |x|, 0).$$

Skissa också motsvarande lösning när koefficienten 2 ersätts med -2.

Övning 2 Hur varierar höjden av vågen som ges av

$$u'_t + c\,u'_x = -u, \qquad u(0,x) = \max(1 - |x|, 0)$$

med tiden?

Övning 3 Lös problemet

$$u'_t + c\,u'_x = -x\,u, \qquad u(0,x) = f(x),$$

där c är en konstant och f en given funktion.

Övning 4 Lös problemet

$$u'_x + y\,u'_y = -u^2, \qquad u(0,y) = y.$$

Övning 5 Finn funktionen $u(x,y)$ som uppfyller $u(0,y) = \dfrac{1}{1+y^2}$ och löser $u'_x + \mathrm{e}^{-x}\,u'_y = 0$.

Övning 6 Lös problemet

$$u'_x - 2x\,u'_y = 3u, \qquad u(0,y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

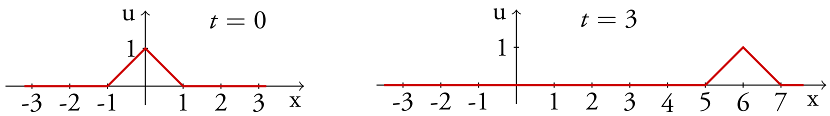
Hittills har problemen varit linjära. Ett exempel på ett icke-linjärt (men kvasi-linjärt) problem är:

Övning 7 Lös problemet

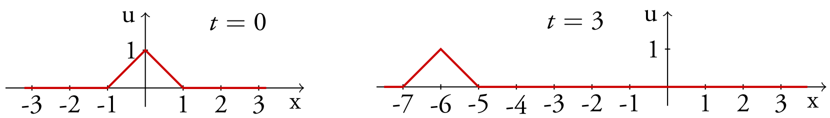
$$(1-2u)u'_x + u'_y = 0, \qquad u(x,0) = x.$$

Svar

Övning 1 För koefficienten 2



och för koefficienten -2



Övning 2 Höjden avtar med faktorn e^{-t}.

Övning 3 Lösningen är $u(t,x) = f(x-ct)\,\mathrm{e}^{-xt+c\,t^2/2}$.

Övning 4 Lösningen är $u(x,y) = \dfrac{y}{xy+\mathrm{e}^x}$.

Övning 5 Lösningen är $u(x,y) = \dfrac{1}{1+(y+\mathrm{e}^{-x}-1)^2}$.

Övning 6 Lösningen är $u(x,y) = \dfrac{1}{1+(y+x^2)^2}\,\mathrm{e}^{3x}$.

Övning 7 Lösningen är $u(x,y) = \dfrac{x-y}{1-2y}$.