**LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA**
**MATEMATIK**

**TENTAMENSSKRIVNING**
**KONTINUERLIGA SYSTEM**
**2018-03-07, kl 8-10**

*HJÄLPMEDEL: Utdelad formelsamling och miniräknare.*
*Motivera lösningarna väl.*

**1.** Två slutna, smala cylindriska rör har samma radie och längd $L$. I det ena röret finns ett färgämne med koncentrationen $q$ och i det andra röret finns samma ämne men med koncentrationen $2q$. Vid tiden $t = 0$ sätts rören ihop till ett rör med längden $2L$ och mellanväggen mellan rören tas bort. Färgämnet börjar omfördela sig genom diffusion. Ställ upp en matematisk modell för koncentrationen av färgämnet i det nya långa röret och bestäm koncentrationen. Vad blir den stationära koncentrationen?

**2.** Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till operatorn

$$\mathcal{A}u = -u'' - 10u', \qquad \mathrm{D}_{\mathcal{A}} = \{u \in \mathrm{C}^2([0,1]);\ u(0) = u(1) = 0\}.$$

Kontrollera även att de två egenvektorer som har lägst egenvärden är ortogonala i lämplig skalärprodukt.

**3.** Låt $\mathrm{C}^1([-1,1])$ vara det linjära, oändligtdimensionella, rummet av kontinuerligt deriverbara funktioner på intervallet $[-1,1]$. Avgör (med motivering) vilka av följande mängder som utgör linjära underrum. Ange i förekommande fall rummets dimension.

i) $\{f \in \mathrm{C}^1([-1,1]);\ f(0) - f'(0) = 0\}$,
ii) $\{f \in \mathrm{C}^1([-1,1]);\ f(0) = 1, f'(0) = 1\}$,
iii) $\{f \in \mathrm{C}^1([-1,1]);\ f(x) - f'(x) = 0\}$,
iv) $\{f \in \mathrm{C}^1([-1,1]);\ \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1\}$,
v) $\{f \in \mathrm{C}^1([-1,1]);\ \int_{-1}^{1} f(x)\,x\,\mathrm{d}x = 0\}$.

**4.** Lös potentialproblemet $\Delta u = 3\sin(2\pi x)$ på kvadraten $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ med homogena Dirichletvillkor på randen.

**LYCKA TILL!**