Datorövning 2

Inledning

Detta är en textversion av det ett *maple worksheet* som heter Datorovning_2.mw och som kan laddas ner från hemsidan. Den ska öppnas inifrån maple. Då kan de utskrivna kommandona utföras direkt genom att man trycker på enter.
Förbered datorövningen genom att göra de förberedelseuppgifter som finns instruktionsbladet, se hemsidan.

Start

För att få de beteckningar som används i kursen för några standardistributioner skriv

```
alias(delta=Dirac,theta=Heaviside);
```

För att få tillgång till några mer avancerade ritkommandon kör

```
with(plots);
```

och för att få några matriskommandon

```
with(linalg);
```

också så glömmer man inte detta senare.

1 Vågutbredning, reflektion

d'Alemberts formel

Matematiska modellen för en endimensionell oändlig sträng med begynnelseläge g och begynnelsehastighet h ges av vågekvationen i $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} u''_{tt} - c^2 u''_{xx} = 0\ , & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u'_t(x,0) = h(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

vars lösningen direkt kan skrivas med *d'Alemberts* formel

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(g(x-ct) + g(x+ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,\mathrm{d}y.$$

Vi ska nu använda maple till att åskådliggöra dessa lösningar.

1.1. Gör en animering av lösningen i exempel 7.1, sidan 206 i boken. Skriv in begynnelsefunktionen $g(x)$:

```
g := x -> (1-x)*(θ(x)-θ(x-1)) +(1+x)*(θ(x+1)-θ(x))
```

och plotta den.
En rörlig bild av lösningen fås sedan med

```
animate((g(x+t)+g(x-t))/2,x=-10..10,t=0..10,numpoints=200,frames=100)
```

Animationen startar då man markerar grafen och sedan klickar på startpilen i menyn. Man kan variera rörelsehastigheten genom att ändra FPS (bilder per sekund).

1.2. Animera på liknande sätt lösningen till exempel 7.2 (sidan 207). Starta med att skriva in begynnelsehastigheten $h(x)$. Välj till exempel $h(x) = \theta(x-1) - \theta(x-2)$. Skriv därefter

```
animate(int(h(y),y=x-t..x+t)/2,x=-10..10,t=0..10,numpoints=200,
frames=100,thickness=2)
```

Stega först fram animeringen genom att klicka på stegknappen (pil mot streck) upprepade gånger. Iaktta speciellt vad som händer i början av animeringen.
Pröva också $h(x) = \delta(x-1)$.
Ser man någon skillnad mellan fallen $h(x) = \theta(x-1) - \theta(x-2)$ och $h(x) = \delta(x-1)$?

Reflektion, upprepade speglingar

1.3. Vi skall nu titta på vågutbredning i en sträng med ändlig längd, speciellt reflektioner i ändpunkterna, jämför sidan 212 i läroboken med $L = 10$. Anta att stängens begynnelseutböjning ges av funktionen $gt(x) = g(x-4)$ där $g(x)$ är definierad i uppgift 1.1. och att begynnelsehastigheten är noll. Skriv

```
gt := x -> g(x-4)
```

och rita upp gt mellan 0 och 10.
Om strängen har fasta ändar gör vi en udda spegling av gt enligt figuren på sidan 213,

```
gu := x -> gt(x)-gt(-x)
```

Kontrollera med en plot över intervallet $(-10, 10)$ att funktionen är rätt speglad.
Om $f(x)$ är en funktion som är definerad på intervallet $[a, a+T]$ så kan f utvidgas till en T periodisk funktion fp med

$$fp(x) = f(x - T\lfloor (x-a)/T \rfloor)$$

där $\lfloor x \rfloor$ betecknar heltalsdelen av x (golvfunktionen) som är det största heltal $\leqslant x$. Exempelvis är $\lfloor 2 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$ och $\lfloor -\pi \rfloor = -4$. Uttrycket $x - T\lfloor (x-a)/T \rfloor$ subtraherar lämpligt antal perioder från x så man återförs till intervallet där f är definierad. Golvfunktionen skrivs floor(x) i maple. Alltså blir

```
gp := x -> gu(x - 20*floor((x+10)/20))
```

en 20-periodisk utvidgning av gu. Kontrollera genom att rita en figur över intervallet $(-100, 100)$ att det ser rätt ut.
Sedan kan vi se rörelsen i strängen med

```
animate((gp(x+t)+gp(x-t))/2,x=0..10,t=0..40,numpoints=200,frames=100)
```

1.4. Har strängen fria ändar (ändarna är fästa vid ringar som löper fritt längs en glatt stav, jämför övning 1.14, alternativt vågor som slår mot kajkanter) skall man i stället spegla jämnt. Gör det (kontrollera med plot) och titta på rörelsen.

1.5. Tänk efter hur man skall spegla om den ena änden ($x = 0$) är fri och den andra är fast. Kontrollera med figurer att speglingarna blir rätt. Pröva sedan med en animering.

1.6. Visa att begynnelsefunktionerna $g_k(x) = \sin kx,\ k = 1, 2, \ldots$ ger stående vågor på en sträng med längden π om man animerar $(g_k(x - t) + g_k(x + t))/2$. (Jämför boken sidan 213.)

1.7. Studera lösningen till ballongexemplet, exempel 7.7, sidan 221. Skriv in funktionen g^- i figuren i boken,

```
gm := r -> r*(θ(r+1)-θ(r-1))
```

Animera lösningsfunktionen för trycket $u(r, t)$, som ges av formeln

$$u(r,t) = \frac{1}{2r}(gm(r - ct) + gm(r + ct)) \ , \quad r > 0 \ , \ t > 0 \ .$$

Observera tryckvariationen i centrum, se anmärkningen sidan 223.

2 Besselfunktioner

2.1. Besselfunktionerna J_ν och Y_ν är kända av maple och anropas med `BesselJ(n,x);` respektive `BesselY(n,x);`, se `?Bessel`. Även nollställena till besselfunktionena finns i maple. De fås med kommandot `BesselJZeros(n,k);`. För att slippa skriva så mycket kan det vara praktiskt att införa kortare beteckningar som

```
alias(J=BesselJ, Y=BesselY, alpha=BesselJZeros)
```

Rita några grafer, till exempel med

```
plot([BesselJ(n,x) $n=0..5],x=0..15)
```

Man kan också uppfatta $J_\nu(x)$ som en funktion av ν och x och rita en tredimensionell bild med

```
plot3d(BesselJ(v,x),x=0..10,v=0..5, axes=normal)
```

och vrida och vända på denna.

2.2. Med kommandot

```
interface(displayprecision = 3)
```

sätts antalet decimater som visas till (det används 10 decimaler i de följande numeriska beräkningarna men det blir svåröverskådligt om alla sen skrivs ut), och med

```
matrix(10,9,(k,n)->evalf(alpha(n-1,k)))
```

genereras en massa nollställen. Jämför med tabellen i formelsamlingen.
I formelsamlingen finns även en tabell med nollställen till derivatorna J'_ν. Dessa nollställen är inte direkt åtkomliga i maple men kan beräknas med följande kommandon

```
A := matrix(11, 11, (k, n) → evalf(BesselJZeros(n-1, k)))
N := matrix(1, 11, (i, j) → 0)
C := stackmatrix(N,A)
B := matrix(9, 11, (k, n) →
fsolve(diff(BesselJ(n-1, x), x) = 0, x, C[k, n] .. C[1+k, n]))
```

Jämför med tabellen i formelsamlingen. Titta på graferna på sidan 331 i boken och förklara vad som händer inne i kommandot `fsolve` i slutet.

2.3. Pröva om maple klarar övning S.11 a). (Här behöver man använda `simplify`.)

2.4. Maple kan många formler för besselfunktioner. Pröva att beräkna $J'_\nu(x)$. Pröva också att uttrycka $J_{1/2}(x)$, $J_{3/2}(x)$, $Y_{1/2}(x)$ med elementära funktioner. Tänk på att skriva `BesselJ(3/2,x)`, inte `BesselJ(1.5,x)`.

2.5. Titta på tredimensionella bilder av egenfunktionerna $J_n(\alpha_{nk}r)\cos(nv)$ till laplaceoperatorn med dirichletvillkor i polära koordinater (se exempel S.4 sid 335–337) för några olika värden på n och k. För $n = 2$, $k = 1$ kan man skriva

```
plot3d([r*cos(v),r*sin(v),J(2,alph a(2,1)*r)*cos(2*v)], r=0..1,v=0..2*Pi)
```

Fast inspända cirkulära membran (se exempel 3.14 sid 108) har svängningsmoder av typ

$$u_{nk} = J_n(\alpha_{nk}r)\cos(nv)\sin(c\alpha_{nk}t).$$

Sådana svängningsmoder kan man få se hur de rör sig med hjälp av kommandot animate3d. För att se membranet svänga i fallet $n = 2, k = 1$, och med c vald så att $c\alpha_{nk} = 1$, kan man skriva

```
animate3d([r*cos(v),r*sin(v),J(2,alpha(2,1)*r)*cos(2*v)*sin(t)],
r=0..1,v=0..2*Pi,t=0..2*Pi)
```

Filmen startas och styrs från menyraden. Genom att klicka på lämplig knapp kan man få den att gå oavbrutet.

Titta på svängningsmoder för några andra värden på n och k.

Vill man titta på ett membran som inte är fast inspänt, utan kan röra sig fritt på randen, på så sätt att det uppfyller ett homogent neumannvillkor, så kan man byta α_{nk} mot α'_{nk} (nollställen till J'_n). Dessa nollställen beräknade du ovan i problem 2.2.

3 Egenvärdesproblem med matlab

Följade avsnitt använder matlab istället för maple men beskrivning står här. Använd PDE-verktygslådan i matlab för att lösa egenvärdesproblemet

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{i } \Omega : x^2 + y^2 < 1, \\ u = 0 & \text{på } \partial\Omega. \end{cases}$$

Här beskrivs lösningarna med hjälp av besselfunktioner och trigonometriska funktioner, enligt exempel S.4 i boken.

3.1. Numerisk lösning enligt följande recept

1. **Start**
   Starta matlab och starta PDE-verktygslådan med kommandot pdetool.

2. **Generering av område**
   Områden kan ritas i pde-fönstret. För att underlätta detta är det bra att skaffa ett rutnät, genom att välja grid under Options-knappen. Välj även snap under Options-knappen för att figurerna ska hamna rätt i förhållande till rutnätet. Rita sen en enhetscirkel.

3. **Differentialekvation**
   Välj pde specification under Pde-knappen. Man får då upp en dialogruta där man kan välja mellan elliptic, parabolic, hyperbolic eller eigenmodes. Välj eigenmodes och kontrollera att de förhandsvalda parametervärdena är rätt för problemet.

4. **Randvillkor**
   Kontrollera att de förhandsvalda randvillkoren och är rätt (homogena dirichletvillkor) genom att välja boundary mode under Boundary-knappen eller snabbknappen $\partial\Omega$. Ränderna till de områden du ritat framträder då och genom att dubbelklicka sedan på något randstycke så kommer det upp en dialog. I denna väljes typ av randvillkor och koefficienter i dessa.

5. **Triangelgenerering**
   Generera en nätverk bestående av trianglar genom att välja initialize mesh under Mesh-knappen eller genom att trycka på snabbknappen med *en* triangel. Indelningen kan sedan förfinas genom att man väljer refine mesh under Mesh-knappen eller trycker på snabbknappen med *fyra* trianglar. Här gäller att man får högre noggrannhet i beräkningarna ju finare indelning man gör, men det tar naturligvis längre tid.

6. **Lös problemet**
   Randvärdesproblemet löses genom att man väler solve pde under Solve-knappen eller trycker på snabbknappen =.

7. **Visualisering**
När problemet lösts kommer det upp en plot som visar egenfunktionen som hör till det minsta egenvärdet. Tag fram dialogrutan under parameters under Plot-knappen. Långt nere till höger finns en ruta med knapp för eigenvalue, där det minsta har förhandsvalts. Genom att välja ett annat egenvärde och trycka på plot får man grafen för motsvarande egenfunktion. Passa också på att välja height (3D-plot) i dialogrutan vilket ger en 3D-plot, som kan vridas och vändas genom att man drar med musen. Vid egenvärdesberäkningar räknar toolboxen enligt förhandsinställningen ut alla egenvärden mellan 0 och 100. Vill man något annat intervall åstadkommes detta genom att välja parameters under Solve-knappen.

3.2. Frågor att fundera på

Här behövs bladet med förberedelseuppgifterna.

1. Hur kan man i den följd av egenvärden som matlab räknat ut med en blick avgöra vilka som svarar mot vinkeloberoende egenfunktioner?
2. Hur stämmer de egenvärden som matlab beräknat med dem i tabellen som du gjort som förberedelseuppgift?
3. Hur kan man från en 3D-bild av en egenfunktion avgöra vilka värden parametrarna n och k har?
4. Om egenfunktionen svarande mot egenvärdet λ_k är begynnelsvärde för en svängningsrörelse som beskrivs av ekvationen $u''_{tt} - c^2 u''_{xx} = 0$, vilken är svängningens vinkelfrekvens?

4 Fundamentallösningar och greenfunktioner (i mån av tid)

Fundamentallösning K till laplaceoperatorn $-\Delta$ i $\mathbb{R}^n$ löser

$$-\Delta K = \delta_0 .$$

Dessa är kända (se boken sidan 158).
Greenfunktionen till laplaceoperatorn i området Ω är för $\alpha \in \Omega$ lösningen till

$$\begin{cases} -\Delta u = \delta_\alpha & \text{i } \Omega, \\ u = 0 & \text{på } \partial\Omega. \end{cases}$$

Greenfunktioner kan för enkla områden konstrueras med hjälp av speglingar och kända fundamentallösningar.

4.1. Fundamentallösningar
Skriv in fundamentallösningarna till laplaceoperatorn i 2 respektive 3 dimensioner.

```
K2 := (x,y) -> -log(x^2+y^2)/(4*Pi)
K3 := (x,y,z) -> 1/sqrt(x^2+y^2+z^2)/(4*Pi)
```

Skriv även en fundamentallösning i 1 dimension.
Titta på en 3dplot av K_2.
Undersök om maple kan beräkna ΔK_3 genom

```
laplacian(K3(x,y,z),[x,y,z])
```

och förenkla.
För vilka (x, y, z) har maple beräknat $-\Delta K_3$?
Beräkna även grad K_3 med

```
grad(K3(x,y,z),[x,y,z])
```

Är grad K_3 är ett känt fält, i så fall vilket?
Gör motsvarande med K_3 utbytt mot K_2.
Beräkna även $-\Delta K_1$.

4.2. Konjugerade punkter för enhetscirkeln.
Enligt boken sidan 167 är funktionen

$$\begin{aligned} G_2(x;\alpha) &= -\frac{1}{2\pi}\left(\ln|x-\alpha| - \ln|x-\alpha'| - \ln|\alpha|\right) \\ &= K_2(x-\alpha) - (K_2(x-\alpha') - \frac{1}{2\pi}\ln(|\alpha|)) \end{aligned}$$

greenfunktion till laplaceoperatorn på enhetscirkeln, där α' är den konjugerade punkten till α.
Vi skall nu undersöka funktionen G_2. Välj $\alpha = (a, 0)$ där $0 < a < 1$ och bestäm motsvarande α. Vad blir koordinaterna för α'?
Skriv sedan

```
G2 := (x,y,a) -> K2(x-a,y)-K2(x-1/a,y)+log(a)/(2*Pi)
```

och gör en 3dplot av G för några olika värden på a, med till exempel

```
plot3d(G2(x,y,0.3),x=-3..7,y=-5..5,numpoints=2000,axes=normal)
```

Genom att välja `Style Patch and contour` kan man se nivåkurvor på ytan.
Med hjälp av kommandot `implicitplot` kan man undersöka var $G_2 = 0$. Skriv

```
implicitplot(G2(x,y,0.3)=0, x=-1..1, y=-1..1)
```

(Om det behövs välj `Scaling Constrained`.) Vilken egenskap hos greenfunktioner illustreras i den figur du just ritat?
Pröva med några andra värden på a.

4.3. I tre dimensioner kan vi inte plotta funktionsgrafer. Däremot kan vi rita nivåytor med kommandot `implicitplot3d`. Sätt

$$G_3(x;\alpha) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-\alpha|} - \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\alpha|}\frac{1}{|x-\alpha'|} = K_3(x-\alpha) - \frac{1}{|\alpha|}K_3(x-\alpha')\ .$$

Enligt boken, sidan 169, är G_3 greenfunktion till dirichlets problem på enhetsklotet. Välj $\alpha = (a, 0, 0)$ för något värde på a, $0 < a < 1$, och bestäm $\tilde{\alpha}$. Skriv in G_3 och titta på nivåytan $G_3 = 0$, skriv

```
G3 := (x,y,z,a) -> K3(x-a,y,z)-K3(x-1/a,y,z)/a;
implicitplot3d(G3(x,y,z,0.2)=0, x=-1..1, y=-1..1, z=-1..1)
```

Välj `Projection Constrained`. Vilken egenskap hos greenfunktioner illustreras i den figur du just ritat?
Gör samma sak för något annat värde på a.