Diffrentialekvationer

Pelle

Matematikcentrum
Lunds universitet

21 januari 2019

Dagens program

- Kursinformation
- Kvick genomgång och repetition av ODE
- Snabbrepetition av flerdim
- Diskussion och härledning av PDE för svängningar

Kontinuerliga system

- Kontinuerliga system - stor kurs - två läsperioder
- Obligatoriska moment
  - 2 datorövningar
  - tenta lördag 1 juni 8-13 i Vic 1 A–C
  - registrering
- Dugga
  - onsdag 13 mars kl 8-10 i MA 10
  - inte obligatorisk men underlättar inläsning
  - bonus +0,5 poäng för godkänt
  - bonus gäller ett år (huvudtentan + 2 omtentor) men kan förnyas
- Övning - fre 8-10 MH 309 A
- Kurslitteratur
- Formelsamling
- Hemsida

Kontinuerliga system

Studie av PDE = partiella differentialekvationer

Allmänbildning och terminologi om PDE

Ordinära - partiella differentialekvationer

- Ordinära
$$f' + \cos(f' f') + e^x f f'' = 0$$
bara en typ av derivator (1 variabel).
- Partiella
$$f'_x + \cos(f'_x f'_y) + e^x f f''_{xy} = 0$$
flera olika derivator (mer än en variabel).

Ordning - största antalet derivator på funktionen - här är bägge av andra ordningen.

Exempel på ODE

- $f' = 0$
- $f' = g$
- $f' = x\,f + 3x$
- $f' = x^2 f^2$
- $e^{f\,f'} = 0$
- $f' = -2\sqrt{f}$
- $f''' + 2f'' + 3f' + 7f = 0$
- $f' + \cos(f'\,f') + e^x\,f\,f'' = 0$

Dagens stora frågor:

- Finns det några lösningar? (Existens)
- Hur många lösningar finns det? (Entydighet)

Viktigt om man ska beräkna lösningar numeriskt vilket man gör i allmänhet.

Derivatans definition

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

momentan ökning av f i x.

- Används huvudsakligen för att visa räknelagarna
  - $(u+v)' = u' + v'$
  - $(uv)' = u'v + uv'$
  - $(u(v))' = u'(v)v'$
- för elementära funktioners derivata, ex om $f(x) = c$ konstant

$$c' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

Viktigaste diffekvationen

$$f' = 0 \Leftrightarrow f(x) = c \qquad (\Leftarrow \textit{ovan}, \Rightarrow \textit{svår})$$

Derivatans definition

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Även

Analysens huvudsats

Om g kontinuerlig så finns

$$G(x) = \int_0^x g(y)\,\mathrm{d}y$$

och $G' = g$.

- vilket ger att $f' = g$ har lösningarna $f = G + c$

Entydighet

- För att få entydighet behövs startvärde (Begynnelsevärde om variabeln är tid t)
- Till exempel $f(0) = 1$
- För högre ordningar behövs även $f'(0) = 2$ osv

Ordinära - allmän form

Knep att få diff ekv av första ordningen - men system
Sätt $f_1 = f$, $f_2 = f'$, ... (Obs! $f_1' = f_2$, $f_2' = f''$.) I vårt fall

$$f' + \cos(f' f') + e^x f f'' = 0,$$

$$\begin{cases} f_2 + \cos(f_2 f_2) + e^x f_1 f_2' = 0, & f_1(x_0) = c_1, \\ f_1' = f_2, & f_2(x_0) = c_2. \end{cases}$$

Allmänt, med $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots)$

$$\mathbf{G}(x, \mathbf{f}, \mathbf{f}') = 0, \qquad \mathbf{f}(x_0) = \mathbf{c}.$$

Alla ordinära differentialekvationer kan skrivas på denna form!

Vi lägger nu begynnelsevärde för att få entydig lösning.

Standardform

Lätt att skriva upp diff ekv som saknar lösning, t ex

$$e^{f f'} = 0,$$

men om vi antar att det finns punkt x_0 med

$$\mathbf{G}(x_0, \mathbf{f}(x_0), \mathbf{f}'(x_0)) = 0$$

plus antagandet att

$$\det(\partial G_j / \partial z_k) \neq 0$$

i samma punkt så kan man lösa ut $\mathbf{f}'$ i närheten av punkten (implicita funktionssatsen) och få standardformen

$$\mathbf{f}' = \mathbf{F}(x, \mathbf{f}), \qquad \mathbf{f}(x_0) = \mathbf{c}.$$

I exemplet

$$\begin{cases} f_1' = f_2, & f_1(x_0) = c_1, \\ f_2' = -(f_2 + \cos(f_2 f_2))/(e^x f_1), & f_2(x_0) = c_2. \end{cases}$$

Picard-Lindelöf

Picard-Lindelöfs sats

Diffrentialekvationssystemet

$$\mathbf{f}'(x) = \mathbf{F}(x, \mathbf{f}(x)), \qquad \mathbf{f}(x_0) = \mathbf{c},$$

har en entydig lösning för x i en liten omgivning av x_0 om F och F'_y är kontinuerliga.

- Det finns alltså lösning.
- Det finns precis en lösning.
- Observera att lösningen bara behöver finnas för x nära x_0.

Exempel

$$\begin{cases} e^{f f'} = 0, \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

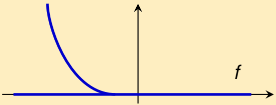
Saknar lösning!

Exempel

$$\begin{cases} f' = -2\sqrt{f}, \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

- Har många lösningar!
- Till exempel $f(t) = 0$

Figur



- men även $f(t) = (1 - \theta(t + c))(t + c)^2, \quad c > 0.$
- Observera att $-2\sqrt{s}$ inte är deriverbar i $s = 0$.
- Modell av hur fort vatten rinner ur ett badkar. Ser man ett tomt badkar kan man inte räkna ut när det var fullt senast.

Viktiga explicita lösningsmetoder

- Integrerande faktor
- För exempelvis

$$\begin{cases} f' = x\,f + 3x \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

- Separera variabler
- För exempelvis

$$\begin{cases} f' = x^2\,f^2 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Exempel på ODE

- $f' = 0\ ,\qquad f(0) = 1$
- $f' = g\ ,\qquad f(0) = 1$
- $f' = x\,f + 3x\ ,\qquad f(0) = 1$
- $f' = x^2 f^2\ ,\qquad f(0) = 1$
- $e^{f\,f'} = 0\ ,$ saknar lösningar
- $f' = -2\sqrt{f}\ ,\qquad f(0) = 0$ har många lösningar
- $f''' + 2f'' + 3f' + 7f = 0\ ,\qquad f(0) = 1,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = 0$
- $f' + \cos(f'\,f') + e^x\,f\,f'' = 0\ ,\qquad f(0) = 1,\ f'(0) = 0$

har entydig lösning (nära $x = 0$)

Partiella differentialekvationer

- Börjar med snabbrepetition av flerdim

Partiella derivator

Definition

$$\partial_y f(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

momentan ökning av f i y-led i punkten (x,y).
Skrivs även

$$\partial_y f = \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y = f_y = \dots$$

Viktigaste PDE:n

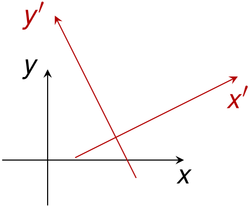
$$\partial_y f = 0 \qquad \text{(för alla } (x,y)\text{)}$$

Har lösningarna

$$f(x,y) = c(x), \quad \text{där } c \text{ är en godtycklig funktion av en variabel}$$

konstant i y-led men får variera i alla andra riktningar.

Variabelbyte - kedjereglen



$$x' = 3 + \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y$$

$$y' = 1 + \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y$$

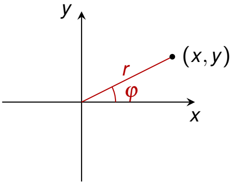
$$0 = \partial_y f = \frac{\partial f}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\partial_{x'} f + \frac{2}{\sqrt{5}}\partial_{y'} f.$$

Differentialekationen ser olika ut i olika koordinatsystem men för Laplaceoperatorn $\Delta f = f''_{xx} + f''_{yy}$ gäller att

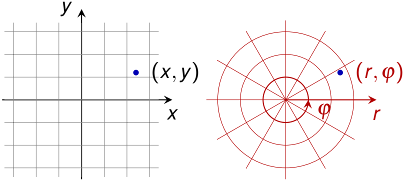
$$f''_{xx} + f''_{yy} = \ldots = f''_{x'x'} + f''_{y'y'}$$

ser likadan ut i alla rätvinkliga koordinatsystem (med samma längdenhet).

Variabelbyte - polära koordinater



$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$



I polära koordinater ändrar Laplaceoperatorn utseende

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \ldots = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}.$$

Finns i formelsamlingen.