Kontsys
F7
Skalärprodukt och normer

Pelle

11 februari 2019

Linjära rum

Ett linjärt rum över $\mathbb{R}$ är en mängd H där man har definerat två räkneoperationer på elementen

- addition: $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in H \implies \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in H$
- multiplikation med tal (skalär): $\lambda \in \mathbb{R}, \boldsymbol{u} \in H \implies \lambda \boldsymbol{u} \in H$
- räkneoperationerna uppfyller vanliga räknelagar
- elementen i H kallas vektorer
- H kallas även vektorrum

Om skalärerna är komplexa tal får man linjärt rum över $\mathbb{C}$

Linjärt underrum

En delmängd $U \subset H$ är ett linjärt underrum om

- $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U \implies \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in U$
- $\lambda \in \mathbb{R}, \boldsymbol{u} \in U \implies \lambda \boldsymbol{u} \in U$

U blir själv ett linjärt rum

Skalärprodukt

En skalärprodukt är en regel som till varje par $u, v \in H$ ordnar en skalär betecknad $(\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$

1. $(\boldsymbol{u} \mid \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2) = \lambda_1 (\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{v}_1) + \lambda_2 (\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{v}_2)$
2. $(\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{u})$ $\quad (\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{v}) = \overline{(\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{u})}$
3. $(\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{u}) \geqslant 0$ och $(\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{u}) = 0 \iff \boldsymbol{u} = 0$

Då gäller automatiskt

- $(\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 \mid \boldsymbol{v}) = \lambda_1 (\boldsymbol{u}_1 \mid \boldsymbol{v}) + \lambda_2 (\boldsymbol{u}_2 \mid \boldsymbol{v})$
  $(\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 \mid \boldsymbol{v}) = \overline{\lambda}_1 (\boldsymbol{u}_1 \mid \boldsymbol{v}) + \overline{\lambda}_2 (\boldsymbol{u}_2 \mid \boldsymbol{v})$
- Alternativa beteckningar

$$(\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{v} \rangle = \ldots$$

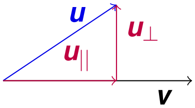
Ett linjärt rum H med skalärprodukt kallas ett pre-Hilbertrum

Ortogonalitet

- $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är ortogonala/vinkelräta om $(\boldsymbol{u} \,|\, \boldsymbol{v}) = 0$
- skrivs $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$

Projektionsformeln

- Ortogonal projektion av vektor $\boldsymbol{u}$ på vektor $\boldsymbol{v}$



- $$\boldsymbol{u}_{||} = \frac{(\boldsymbol{v}\,|\,\boldsymbol{u})}{(\boldsymbol{v}\,|\,\boldsymbol{v})}\,\boldsymbol{v}$$

- Komposantuppdelning

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{||} + \boldsymbol{u}_{\perp} \qquad (\text{dvs} \quad \boldsymbol{u}_{\perp} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{||}\ )$$

  där $\boldsymbol{u}_{||}$ parallell med $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{u}_{\perp}$ är vinkelrät mot $\boldsymbol{v}$

- Koll: . . .

Norm

- $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{(\boldsymbol{u}\,|\,\boldsymbol{u})}$ kallas normen av u (längden)
- $\|\boldsymbol{u}\|^2 = (\boldsymbol{u}\,|\,\boldsymbol{u})$

För att $\|\boldsymbol{u}\|$ ska få kallas norm måste den uppfylla

1. $\|\boldsymbol{u}\| \geqslant 0$ och $\|\boldsymbol{u}\| = 0$ precis då $\boldsymbol{u} = 0$
2. $\|\lambda \boldsymbol{u}\| = |\lambda|\|\boldsymbol{u}\|$
3. $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leqslant \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$ triangelolikheten

Egenskap 1 och 2 följer direkt av räknereglerna, 3 kräver lite jobb

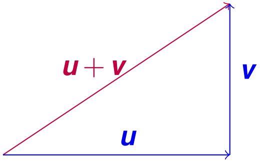
Pythagoras sats

Låt H vara pre-Hilbertrum (linjärt rum med skalärprodukt).

Pythagoras sats

Om $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in H$, $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ *så*

$$\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2$$



Bevis: ...

Cauchy-Bunjakovski-Schwarz

Låt H vara pre-Hilbertrum (linjärt rum med skalärprodukt).

Cauchy-Bunjakovski-Schwarz olikhet

Om $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in H$,

$$|(\boldsymbol{u} \,|\, \boldsymbol{v})| \leqslant \|\boldsymbol{u}\| \|\boldsymbol{v}\|$$

Alternativt

$$|(\boldsymbol{u} \,|\, \boldsymbol{v})|^2 \leqslant (\boldsymbol{u} \,|\, \boldsymbol{u})(\boldsymbol{v} \,|\, \boldsymbol{v})$$

Bevis: ...

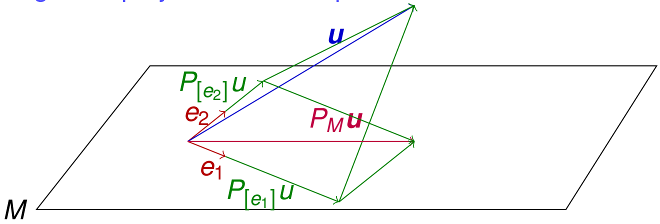
Med hjälp av denna visas triangelolikheten för normer.

Projektioner

Låt H vara pre-Hilbertrum (linjärt rum med skalärprodukt). Låt $e_1, \ldots, e_n$ vara parvis ortogonala med $M = [e_1, \ldots, e_n]$ underrummet de spänner upp.

$$P_M \boldsymbol{u} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(e_k \,|\, \boldsymbol{u})}{\|e_k\|^2}\, e_k$$

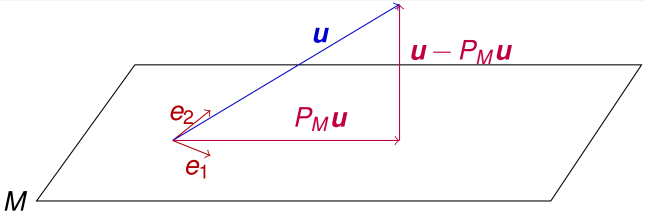
kallas ortogonala projektionen av $\boldsymbol{u}$ på M.



Projektioner

Projektionssatsen

- $P_M \boldsymbol{u} \in M$
- $\boldsymbol{u} - P_M \boldsymbol{u} \perp M$
- $\inf_{\boldsymbol{v} \in M} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u} - P_m \boldsymbol{u}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{|(e_k \mid \boldsymbol{u})|^2}{\|e_k\|^2}$



Koll: $(e_j \mid \boldsymbol{u} - P_M \boldsymbol{u}) = 0$ alla j

Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod

Gram-Schmidt

Om $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ är bas för $[\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n]$ så finns finns ON-bas $e_1, \dots, e_n$ sån att

$$[\boldsymbol{u}_1] = [e_1],\ [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2] = [e_1, e_2],\ [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3] = [e_1, e_2, e_3],\ \dots$$

- $\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{u}_1$ $\qquad e_1 = \frac{\boldsymbol{f}_1}{||\boldsymbol{f}_1||}$
- $\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{u}_2 - P_{[\boldsymbol{f}_1]}\boldsymbol{u}_2$ $\qquad e_2 = \frac{\boldsymbol{f}_2}{||\boldsymbol{f}_2||}$
- $\boldsymbol{f}_3 = \boldsymbol{u}_3 - P_{[\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2]}\boldsymbol{u}_3$ $\qquad e_3 = \frac{\boldsymbol{f}_3}{||\boldsymbol{f}_3||}$
- $\boldsymbol{f}_4 = \boldsymbol{u}_4 - P_{[\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3]}\boldsymbol{u}_4$ $\qquad e_4 = \frac{\boldsymbol{f}_4}{||\boldsymbol{f}_4||}$