Kontsys
F6
Linjära rum

Pelle

6 februari 2019

Linjära rum

Ett linjärt rum över $\mathbb{R}$ är en mängd H där man har definerat två räkneoperationer på elementen

- addition: $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in H \implies \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in H$
- multiplikation med tal (skalär): $\lambda \in \mathbb{R}, \boldsymbol{u} \in H \implies \lambda \boldsymbol{u} \in H$
- räkneoperationerna uppfyller vanliga räknelagar
- elementen i H kallas vektorer
- H kallas även vektorrum

Om skalärerna är komplexa tal får man linjärt rum över $\mathbb{C}$

Räkneregler för reella tal

(i) $a+b=b+a$ kommutativa lagen
$a+(b+c)=(a+b)+c$ associativa lagen
$a+0=a$
$a+(-a)=0$

(ii) $ab=ba$ kommutativa lagen
$a(bc)=(ab)c$ associativa lagen
$1\cdot a=a$
$a\cdot a^{-1}=1$
$a\cdot 0=0$

(iii) $a(b+c)=ab+ac$ distributiva lagen

(iv) för a och b gäller att $a<b$ eller $b<a$ eller $a=b$

Räkneregler för vektorer

(i) $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ kommutativa lagen

$\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}$ associativa lagen

$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{u}$

$\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u})=\boldsymbol{0}$

(ii) $\lambda(\mu\boldsymbol{u})=(\lambda\mu)\boldsymbol{u}$

$1\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$

$0\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$

$\lambda\cdot\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$

(iii) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{u}=\lambda\,\boldsymbol{u}+\mu\,\boldsymbol{u}$ distributiva lagar

$\lambda(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\lambda\,\boldsymbol{u}+\lambda\,\boldsymbol{v}$

Linjära underrum

En delmängd $U \subset H$ är ett linjärt underrum om

- $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U \implies \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in U$
- $\lambda \in \mathbb{R}, \boldsymbol{u} \in U \implies \lambda \boldsymbol{u} \in U$

U blir själv ett linjärt rum

Terminologi för linjära rum

- $$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \boldsymbol{u}_k$$
  kallas en linjärkombination av vektorerna $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$
- Om $M \subset H$ så är det linjära höljet av M mängden av alla ändliga linjärkombinationer av vektorer i M.
- Skrivs $[M]$
- Man säger också att M spänner upp $[M]$
- Om $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{0} \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ så sägs $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ vara linjärt oberoende
- Om vektorerna $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$
  - är linjärt oberoende
  - spänner upp H

  så kallas de en bas för H
- Antalet vektorer i en bas kallas dimensionen av H
  $\dim H = n$. Samma antal för alla baser!

Skalärprodukt

En skalärprodukt är en regel som till varje par $u, v \in H$ ordnar en skalär betecknad $(\boldsymbol{u} \,|\, \boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$

1. $(\boldsymbol{u} \,|\, \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2) = \lambda_1 (\boldsymbol{u} \,|\, \boldsymbol{v}_1) + \lambda_2 (\boldsymbol{u} \,|\, \boldsymbol{v}_2)$
2. $(\boldsymbol{u} \,|\, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v} \,|\, \boldsymbol{u})$ $\quad$ $(\boldsymbol{u} \,|\, \boldsymbol{v}) = \overline{(\boldsymbol{v} \,|\, \boldsymbol{u})}$
3. $(\boldsymbol{u} \,|\, \boldsymbol{u}) \geqslant 0$ och $(\boldsymbol{u} \,|\, \boldsymbol{u}) = 0 \iff \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$

Då gäller automatiskt

- $(\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 \,|\, \boldsymbol{v}) = \lambda_1 (\boldsymbol{u}_1 \,|\, \boldsymbol{v}) + \lambda_2 (\boldsymbol{u}_2 \,|\, \boldsymbol{v})$
  $(\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 \,|\, \boldsymbol{v}) = \overline{\lambda}_1 (\boldsymbol{u}_1 \,|\, \boldsymbol{v}) + \overline{\lambda}_2 (\boldsymbol{u}_2 \,|\, \boldsymbol{v})$
- Alternativa beteckningar

$$(\boldsymbol{u} \,|\, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{u} \,|\, \boldsymbol{v} \rangle = \dots$$

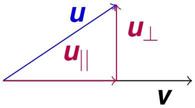
Ett linjärt rum H med skalärprodukt kallas ett pre-Hilbertrum

Ortogonalitet

- $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är ortogonala/vinkelräta om $(\boldsymbol{u} \,|\, \boldsymbol{v}) = 0$
- skrivs $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$

Projektionsformeln

- Ortogonal projektion av vektor $\boldsymbol{u}$ på vektor $\boldsymbol{v}$



- $$\boldsymbol{u}_{||} = \frac{(\boldsymbol{v} \,|\, \boldsymbol{u})}{(\boldsymbol{v} \,|\, \boldsymbol{v})}\, \boldsymbol{v}$$

- Komposantuppdelning

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{||} + \boldsymbol{u}_{\perp}$$

där $\boldsymbol{u}_{||}$ parallell med $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{u}_{\perp}$ är vinkelrät mot $\boldsymbol{v}$

- Koll: ...