Kontsys
F10

Pelle

20 februari 2019

Operatorer

Låt H Hilbertrum och

$$A : \mathrm{D}_A \to H$$

vara linjär operator där D_A är tät delmängd i H.

A är symmetrisk om

$$(A(u) \,|\, v) = (u \,|\, A(v)), \qquad u, v \in \mathrm{D}_A$$

A är positivt semidefinit om $(u \,|\, A(u)) \geqslant 0$ för alla $u \in \mathrm{D}_A$.
A är positivt definit om $(u \,|\, A(u)) > 0$ för alla $u \in \mathrm{D}_A, u \neq 0$.

Sats

A symmetrisk $\implies$ alla egenvärden reella
Egenfunktioner motsvarande $\lambda_1 \neq \lambda_2$ är ortogonala.
A pos semidef/pos def $\implies$ alla egenvärden $\geqslant 0$ resp. > 0.

Spektralsatser

Spektralsats för matriser

Låt A vara symmetrisk $n \times n$-matris. Då finns en ortogonal bas av egenvektorer $\{\boldsymbol{e}_k\}_{k=1}^n$, reella egenvärdena som kan numreras så att $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ och

$$A(u) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_{[\boldsymbol{e}_k]}(u), \quad u \in \mathbb{R}^n.$$

Spektralsats för operatorer

Låt A symmetrisk operator på hilbertrum H (+ två tekniska villkor). Då finns en ortogonal bas av egenvektorer $\{\boldsymbol{e}_k\}_{k=1}^\infty$, reella egenvärdena som kan numreras så att $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$ och

$$A(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_{[\boldsymbol{e}_k]}(u), \quad u \in \mathrm{D}_A.$$

Exempel

$A = -\frac{d^2}{dx^2}$ på

$D_A = \left\{u \in C^2([0,\pi])\,;\, u(0) = u(\pi) = 0\right\}$ tät i $L_2([0,\pi])$.

- A är symmetrisk

$$
\begin{aligned}
(u \,|\, A(v)) &= \int_0^\pi \overline{u(x)}(-v''(x))\,dx \\
&= -[\overline{u(x)}v'(x)]_0^\pi + \int_0^\pi \overline{u'(x)}v'(x)\,dx \\
&= \int_0^\pi \overline{u'(x)}v'(x)\,dx \\
&= [\overline{u'(x)}v(x)]_0^\pi - \int_0^\pi \overline{u''(x)}v(x)\,dx \\
&= \int_0^\pi \overline{-u''(x)}v(x)\,dx = (A(u) \,|\, v), \qquad u, v \in D_A
\end{aligned}
$$

Exempel

$A = -\frac{d^2}{dx^2}$ på
$D_A = \left\{ u \in C^2([0,\pi]) \,;\, u(0) = u(\pi) = 0 \right\}$ tät i $L_2([0,\pi])$.

- A är symmetrisk
- A är positivt semidefinit

$$(u \mid A(u)) = \int_0^\pi \overline{u'(x)} u'(x) \, dx = \int_0^\pi |u'(x)|^2 \, dx \geqslant 0$$

Exempel

$A = -\frac{d^2}{dx^2}$ på
$D_A = \left\{ u \in C^2([0,\pi])\,;\, u(0) = u(\pi) = 0 \right\}$ tät i $L_2([0,\pi])$.

- A är symmetrisk
- A är positivt semidefinit
- A är positivt definit

$$(u \,|\, A(u)) = 0 \iff \int_0^\pi |u'(x)|^2 \, dx = 0 \iff u'(x) = 0$$

dvs $u(x) = C$ men D_A ger att $u(x) = 0$.

Exempel

$A = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ på
$\mathrm{D}_A = \left\{ u \in \mathrm{C}^2([0,\pi]) \,;\, u(0) = u(\pi) = 0 \right\}$ tät i $\mathrm{L}_2([0,\pi])$.

- A är symmetrisk
- A är positivt semidefinit
- A är positivt definit
- Spektralsatsen ger att A har positiva reella egenvärden och att motsvarande egenfunktioner bildar ortonormerad bas i L_2.
- Egenfunktionerna löser

$$-u'' = \lambda u, \quad u(0) = u(\pi) = 0$$

och är $u_k = \sin(kx)$ med $\lambda_k = k^2$ för $k = 1, 2, 3, \ldots$

Reguljära Sturm-Liouville operatorer

Med ett intervall $I = [x_0, x_1]$ kallas en operator

$$A(u) = \frac{1}{w(x)}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right) + q(x)u(x)\right) = \frac{1}{w}\left(-(pu')' + qu\right)$$

där $p \in \mathrm{C}^1(I)$, $q, w \in \mathrm{C}^0(I)$ med $p, q \geqslant 0$, $w > 0$ och

$$\mathrm{D}_A = \left\{u \in \mathrm{C}^2(I)\,;\, \alpha_0 u(x_0) - \beta_0 u'(x_0) = 0, \alpha_1 u(x_1) + \beta_1 u'(x_1) = 0\right\}$$

där α_0, $\beta_0 \geqslant 0$ inte båda $= 0$ och α_1, $\beta_1 \geqslant 0$ inte båda $= 0$
för en reguljär Sturm-Liouvilleoperator.

Sats

Då är A både symmetrisk och positivt semidefinit på Hilbertrummet $\mathrm{L}_2(w, I)$. (Samma w!)

Spektralsats för Sturm-Liouvilleoperatorer

Spektralsats

Låt A vara Sturm-Liouvilleoperator på $\mathrm{L}_2(w, I)$*. Då finns en ortogonal bas av egenvektorer* $\{\boldsymbol{e}_k\}_{k=1}^{\infty}$*, reella egenvärdena som kan numreras så att* $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$ *med* $\lambda_k \to \infty, k \to \infty$*. Varje* $u \in \mathrm{L}_2(w, I)$ *kan skrivas*

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \boldsymbol{e}_k, \qquad c_k = \frac{(\boldsymbol{e}_k \,|\, u)}{\|\boldsymbol{e}_k\|^2}$$

Vidare om $u \in \mathrm{D}_A$ *så gäller*

$$A(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k c_k \, \boldsymbol{e}_k$$