2011-12-13

**1.** Tag ut systemmatrisen $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&-1&1\\1&-a&-1\end{pmatrix}$

$\det A=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&-1&1\\1&-a&-1\end{vmatrix}=1+1-a^2-(-1)-(-a)-(-a)=$

$=-a^2+2a+3=-(a^2-2a-3)=-(a+1)(a-3)=0 \iff \begin{cases}a=-1\\a=3\end{cases}$

$\underline{a=-1}:\begin{cases}x+y+z=0\\-x-y+z=0\\x+y-z=0\end{cases}\iff\begin{cases}x+y+z=0\\2z=0\\-2z=0\end{cases}\iff\begin{cases}x=-t\\y=t\\z=0\end{cases}$

$\underline{a=3}:\begin{cases}x+y+z=0\\3x-y+z=0\\x-3y-z=0\end{cases}\iff\begin{cases}x+y+z=0\\-4y-2z=0\\-4y-2z=0\end{cases}\iff\begin{cases}x=t\\y=t\\z=-2t\end{cases}$

Svar: $a\neq-1$ och $a\neq3$: $(x,y,z)=(0,0,0)$
$a=-1$: $(x,y,z)=(-t,t,0)$, $t\in\mathbb{R}$
$a=3$: $(x,y,z)=(t,t,2t)$, $t\in\mathbb{R}$

**2a.** Riktn.vektorer $\overline{P_1P_2}=(0,1,2)$, $\overline{P_1P_3}=(2,-1,0)$

Normal: $(0,1,2)\times(2,-1,0)=(2,4,-2)$, $\quad\begin{matrix}0&1&2&0&1&2\\2&-1&0&2&-1&0\end{matrix}$

Välj $(1,2,-1)$, vilket ger $\pi: x+2y-z+D=0$

$(1,0,1)$ i $\pi$: $1+2\cdot0-1+D=0\iff D=0$

Svar: $\pi: x+2y-z=0$

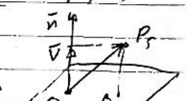
**b.** Riktn.vektor $\overline{P_4P_5}=(3,2,1)$ Med punkt $P_4$:

$l: (x,y,z)=(1,4,3)+t(3,2,1)$. Skär $\pi$:

$(1+3t)+2(4+2t)-(3+t)=0\iff 6+6t=0\iff t=-1$,

ger punkt $(1,4,3)-(3,2,1)=(-2,2,2)$ Svar: $(-2,2,2)$

**c.** $\bar v$ orto proj av $\overline{OP_5}=(4,6,4)$ på $\bar n=(1,2,-1)$:




$\bar v=\frac{\overline{OP_5}\cdot\bar n}{|\bar n|^2}\cdot\bar n=\frac{(4,6,4)\cdot(1,2,-1)}{|(1,2,-1)|^2}(1,2,-1)=\frac{12}{6}(1,2,-1)=$

$=(2,4,-2)\qquad \overline{OQ}=\overline{OP_5}-\bar v=$

$=(4,6,4)-(2,4,-2)=(2,2,6)$ Svar: $Q:(2,2,6)$

**3a.** $\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1\\-4&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2-4=0\iff$

$\lambda-1=\pm2\iff\lambda=-1,\ \lambda=3$

$\underline{\lambda=-1}:\begin{cases}-2x-y=0\\-4x-2y=0\end{cases}\iff\begin{cases}x=t\\y=-2t\end{cases}$

$\underline{\lambda=3}:\begin{cases}2x-y=0\\-4x+2y=0\end{cases}\iff\begin{cases}x=t\\y=2t\end{cases}$

Svar: Egenvektor $t(1,-2)$, $t\neq0$, med egenvärde $\lambda=-1$
— " — $t(1,2)$, $t\neq0$, — " — $\lambda=3$

**b.** Med egenvektorer som kolonner i $S$ och motsv. egenvärden som diagonalelement i $D$ får vi exempelvis: Svar: $S=\begin{pmatrix}1&1\\-2&2\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix}$

**3c.** $(AX-I)^T=A\iff AX-I=A^T\iff$

$AX=A^T+I\iff X=A^{-1}(A^T+I)$

$\underline{A^{-1}}:\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&0\\4&1&0&1\end{array}\right)\iff\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&0\\0&-3&-4&1\end{array}\right)\iff$

$\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&0\\0&1&\frac43&-\frac13\end{array}\right)\iff\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-\frac13&\frac13\\0&1&\frac43&-\frac13\end{array}\right)$

$\Rightarrow A^{-1}=\frac13\begin{pmatrix}-1&1\\4&-1\end{pmatrix}$

$X=A^{-1}(A^T+I)=\frac13\begin{pmatrix}-1&1\\4&-1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1&4\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=$

$=\frac13\begin{pmatrix}-1&1\\4&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}=\frac13\begin{pmatrix}-1&-2\\7&14\end{pmatrix}$

Svar: $X=\frac13\begin{pmatrix}-1&-2\\7&14\end{pmatrix}$

4. Välj $\hat{e}_1$ som normalen $(2,2,1)$ normerad:

$|(2,2,1)| = 3 \Rightarrow \hat{e}_1 = \frac{1}{3}(2,2,1)$

$\hat{e}_2$ orto mot $(2,2,1)$, och mot riktningsvektorn $(2,3,2)$.

$(2,2,1) \times (2,3,2) = (1,-2,2)$

Normering ger $\hat{e}_2 = \frac{1}{3}(1,-2,2)$

$\hat{e}_3 = \hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \frac{1}{3}(2,2,1) \times \frac{1}{3}(1,-2,2) =$

$= \frac{1}{9}(6,-3,-6) = \frac{1}{3}(2,-1,-2)$

Eftersom $\hat{e}_1$ orto mot planet blir en normalvektor i nya koordinater $(1,0,0)$.

Vidare genom origo, så $\pi: \hat{x} = 0$

Svar: $\begin{cases} \hat{e}_1 = \frac{1}{3}(2,2,1) \\ \hat{e}_2 = \frac{1}{3}(1,-2,2) \\ \hat{e}_3 = \frac{1}{3}(2,-1,-2) \end{cases}$

$\pi: \hat{x} = 0$

5a. $F$: $F(1,0,0) = (2,1,0)$

$(0,1,0) = (1,1,0) - (1,0,0) \Rightarrow F(0,1,0) = F(1,1,0) - F(1,0,0) =$
$= (0,0,1) - (2,1,0) = (-2,-1,1)$

$(0,0,1) = (1,1,1) - (1,1,0) \Rightarrow F(0,0,1) = F(1,1,1) - F(1,1,0) =$
$= (0,-1,3) - (0,0,1) = (0,-1,2)$

$(1,0,0) \to (2,1,0)$
$(0,1,0) \to (-2,-1,1)$ $\Rightarrow$ Matris $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
$(0,0,1) \to (0,-1,2)$

$G$: $(1,0,0) \to (1,0,0)$ (i planet)
$(0,1,0) \to (0,-1,0)$ (Speglas) $\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$(0,0,1) \to (0,0,1)$ (i planet)

$G \circ F$:
$C = B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b. $\det C = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 0 + 0 - 0 - 4 - 2 = -2$

$\Rightarrow |\det C| = 2 > 1$, så större

6a. Värdemängden för en vridning är hela rummet av dimension 3, så rang $A = 3$

b. Vektorerna på linjen avb alltid på sig själva för alla $\theta$: $\lambda = 1$

Vrider vi helt varv avb. alla vektorer på sig själva: $\lambda = 1$

Vrider vi halvt varv avb. alla orto mot linjen på minus sig själva: $\lambda = -1$

Inga andra vridningar ger fler egenvärden

Svar: $\theta = \pi + k \cdot 2\pi$: $\lambda = 1$ och $\lambda = -1$
övriga $\theta$: $\lambda = 1$

c. När kan vi välja 3 lin. ober egenvektorer?

Jo, enligt ovan: då vi vrider ett helt eller ett halvt varv

Svar: Då $\theta = k \cdot \pi$