7.26. Inte kvadratiskt, men skall vi ha oändl många lösn måste $\begin{cases} x+ay=2 \\ ax+4y=4 \end{cases}$ ha oändl. många lösn.

Plocka ut $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 4 \end{pmatrix}$ Enligt Sats 10:

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 4 \end{vmatrix} = 4 - a^2 = 0 \iff a = \pm 2$$

$a=2$: $\begin{cases} x+2y=2 \\ 2x+4y=4 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2y=2 \\ 0=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2-2t \\ y = t \end{cases}$

$a=-2$: $\begin{cases} x-2y=2 \\ -2x+4y=4 \end{cases} \iff \begin{cases} x-2y=2 \\ 0=8 \end{cases}$ Ingen lösn

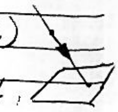
Fixa till sista för $a=2$:

$x - by = 2$, dvs $2-2t-bt = 2 \iff (-2-b)t = 0$

Så om $b=-2$ stämmer detta för alla $t$

Svar: $a=2$ : $b=-2$ ger $\begin{cases} x = 2-2t \\ y = t \end{cases}$

8.36. Linje genom $(1,0,0)$ med riktning $(1,1,2)$



$(1,0,0)+t(1,1,2) = (1+t, t, 2t)$ Skär planet:

$(1+t) - t + 2t = 2t+1 = 0 \iff t = -\frac{1}{2} \implies$ punkt: $\frac{1}{2}(1,-1,-2)$

Genom $(0,1,0)$: $(t, 1+t, 2t)$ Skär planet:

$t - (1+t) + 2t = 2t - 1 = 0 \iff t = \frac{1}{2} \implies$ punkt: $\frac{1}{2}(1,3,2)$

Genom $(0,0,1)$: $(t, t, 1+2t)$ Skär planet:

$t - t + (1+2t) = 1+2t = 0 \iff t = -\frac{1}{2} \implies$ punkt: $\frac{1}{2}(-1,-1,0)$

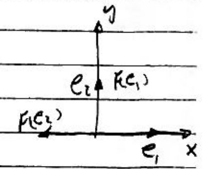
Projektionen av basvektorerna är således:

$(1,0,0) \curvearrowright \frac{1}{2}(1,-1,-2)$
$(0,1,0) \curvearrowright \frac{1}{2}(1,3,2)$
$(0,0,1) \curvearrowright \frac{1}{2}(-1,-1,0)$
$\implies P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Skriv avbmatrisen för projektionen.

Rotationen: Ingenting händer i "z-led".

$(1,0,0) \curvearrowright (0,1,0)$
$(0,1,0) \curvearrowright (-1,0,0)$
$(0,0,1) \curvearrowright (0,0,1)$
$\implies R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$




Sammansättning: $\underset{\text{sedan}}{R} \cdot \underset{\text{först}}{P} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

8.41. a. Lös $AX = 0 \iff 6AX = 0$ : (använd $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$)

$$\begin{cases} 5x-2y+z = 0 & (1) \\ -2x+2y+2z = 0 & (2) \\ x+2y+5z = 0 & (3) \end{cases} \iff \begin{cases} x+2y+5z = 0 & (1')=(3) \\ 6y+12z = 0 & (2')=(2)+2(3) \\ -12y-24z = 0 & (3')=(1)-5(3) \end{cases} \iff \begin{cases} x = -t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$$

b. Avbildas på sig själv: $AX = X \iff 6AX = 6X$:

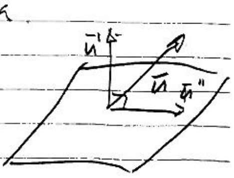
$$\begin{cases} 5x-2y+z = 6x \\ -2x+2y+2z = 6y \\ x+2y+5z = 6z \end{cases} \iff \begin{cases} -x-2y+z = 0 \\ -2x-4y+2z = 0 \\ x+2y-z = 0 \end{cases}$$ "Samma"!

Lösn är de $(x,y,z)$ som uppfyller $x+2y-z=0$, dvs precis det givna planet.

c. $t(-1,-2,1)$ som avbildas på $\bar{0}$ är precis "normalvektorerna" till planet $x+2y-z=0$ där vektorerna avb på sig själva.

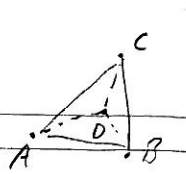
$F(\bar{u}) = F(\bar{u}' + \bar{u}'') = F(\bar{u}') + F(\bar{u}'') =$

$= \bar{0} + \bar{u}'' = \bar{u}''$.




Avb är ortogonal proj på planet! (tänk!)

9.8 $\begin{cases} A: (2,1,-1) \\ B: (0,3,3) \\ C: (-1,-2,0) \\ D \text{ på x-axeln}: (x,0,0) \end{cases}$




$\overline{AB} = (-2,2,4)$ volym tetra $= \frac{1}{6}$ volym parallellepiped $= 8$
$\overline{AC} = (-3,-3,1)$
$\overline{AD} = (x-2,-1,1)$ $\implies$ determinanten $= \pm 6 \cdot 8 = \pm 48$
(ty determinanten = volym med tecken!)

$\det(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} -2 & -3 & x-2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$

$= 6 + 12 + 2(x-2) - (-12)(x-2) - (-6) - 2 = 14x - 6$

$14x - 6 = 48 \iff 14x = 54 \iff x = \frac{54}{14} = \frac{27}{7}$
$14x - 6 = -48 \iff 14x = -42 \iff x = -\frac{42}{14} = -3$

Svar: Punkterna $(\frac{27}{7}, 0, 0)$ och $(-3,0,0)$

9.40 Plocka ut $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}$. Ej ent. lösn. $\iff \det A = 0$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix} = 2-b-b-(-1)-(-1)-2b^2 =$$

$$= 4-2b-2b^2 = 0 \iff$$

$$b^2+b-2=0 \iff b = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}+2} = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{9}{4}} = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{3}{2} \iff$$

$b=1$ eller $b=-2$

$b=1$: $\begin{cases} 2x-y-z=3 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=3 \end{cases}$ Ingen lösn!

$b=-2$: $\begin{cases} 2x-y-z=0 \\ x+y-2z=3 \\ x-2y+z=-3 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y-2z=3 \\ -3y+3z=-6 \\ -3y+3z=-6 \end{cases} \iff$

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=t \end{cases}$$

Svar: $b=-2$ ger $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=t \end{cases}$

9.51 Vi kan beräkna $u \cdot u = |u|^2 = 1$, $v \cdot v = 2^2 = 4$, $w \cdot w = 3^2 = 9$

$u \cdot v = |u||v| \cdot \cos(u,v) = 1 \cdot 2 \underbrace{\cos \tfrac{\pi}{4}}_{1/\sqrt{2}} = \sqrt{2}$,

$u \cdot w = 1 \cdot 3 \cdot \underbrace{\cos \tfrac{\pi}{3}}_{1/2} = \tfrac{3}{2}$, $\quad v \cdot w = 2 \cdot 3 \cdot \underbrace{\cos \tfrac{\pi}{6}}_{\sqrt{3}/2} = 3\sqrt{3}$

Var har vi nytta av detta?

Volymen ges av |determinanten| då vi sätter vektorerna som kolonner: $A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ u & v & w \\ | & | & | \end{pmatrix}$

Knep: $A^T A = \begin{pmatrix} -u- \\ -v- \\ -w- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & | \\ u & v & w \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \cdot u & u \cdot v & u \cdot w \\ v \cdot u & v \cdot v & v \cdot w \\ w \cdot u & w \cdot v & w \cdot w \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & \frac{3}{2} \\ \sqrt{2} & 4 & 3\sqrt{3} \\ \frac{3}{2} & 3\sqrt{3} & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A^T A = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} & \frac{3}{2} \\ \sqrt{2} & 4 & 3\sqrt{3} \\ \frac{3}{2} & 3\sqrt{3} & 9 \end{vmatrix} =$

$= 36 + \tfrac{9}{2}\sqrt{6} + \tfrac{9}{2}\sqrt{6} - 9 - 18 - 27 = 9\sqrt{6} - 18 = 9(\sqrt{6}-2)$

Men $\det A^T A = \det A^T \det A = \det A \det A = (\det A)^2$,

dvs. $|\det A| = \sqrt{\det A^T A} = \sqrt{9(\sqrt{6}-2)} = 3\sqrt{\sqrt{6}-2}$

Svar: Volymen blir $3\sqrt{\sqrt{6}-2}$