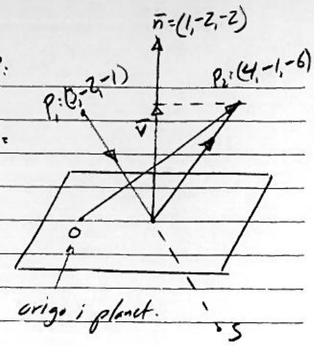
440. Sök spegelbild S av P_2:



$\overline{OS} = \overline{OP_2} - 2\bar{v} = \overline{OP_2} - 2\frac{\overline{OP_2}\cdot\bar{n}}{|\bar{n}|^2}\cdot\bar{n} =$

$= (4,-1,-6) - 2\frac{18}{9}(1,-2,-2) =$

$= (4,-1,-6) - 4(1,-2,-2) = (0,7,2)$

Linjen genom P_1 & S:

riktnvektor $\overline{P_1S} = (-3,9,3)$ eller $\underline{(-1,3,1)}$

punkt S $\Rightarrow$ $(x,y,z) = (0,7,2) + t(-1,3,1)$

Skär planet $x-2y-2z=0$:

$(0-t) - 2(7+3t) - 2(2+t) = 0 \iff$

$-18 - 9t = 0 \iff t = -2$ ger punkten

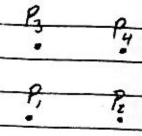
$(0,7,2) - 2(-1,3,1) = (\underline{2,1,0})$

Svar: $(2,1,0)$

443. $P_1:(1,1,1)$ $P_2:(3,-2,7)$ $P_3:(4,7,3)$ $P_4:(a,b,c)$

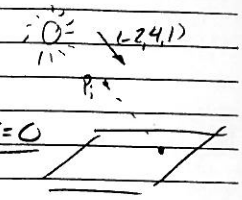
$\overline{P_1P_2} = (2,-3,6) \Rightarrow |\overline{P_1P_2}| = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$

$\overline{P_1P_3} = (3,6,2) \Rightarrow |\overline{P_1P_3}| = \sqrt{9+36+4} = 7$



Punkterna måste då ligga enligt

$\overline{P_1P_2} = \overline{P_3P_4} \iff (2,-3,6) = (a,b,c) - (4,7,3) \Rightarrow P_4 : (a,b,c) = \underline{(6,4,9)}$



Vi skall projecera, men

inte ortogonalt! xy-planet $\iff$ $\underline{z=0}$

Linjen genom P_1 med riktning $(-2,4,1)$:

$(x,y,z) = (1,1,1) + t(-2,4,1)$ Skär $z=0$: $1+t=0 \iff t=-1$

Skuggan av P_1: $\underline{(3,-3,0)}$

P_2: $(3,-2,7) + t(-2,4,1)$, $7+t=0 \iff t=-7 \Rightarrow \underline{(17,-30,0)}$

P_3: $(4,7,3) + t(-2,4,1)$, $3+t=0 \iff t=-3 \Rightarrow \underline{(10,-5,0)}$

P_4: $(6,4,9) + t(-2,4,1)$, $9+t=0 \iff t=-9 \Rightarrow \underline{(24,-32,0)}$

Svar: Hörnen blir $(3,-3,0)$, $(17,-30,0)$, $(10,-5,0)$ & $(24,-32,0)$

(Fråga: Går det att bestämma sista hörnet "till sist"?)

5.5. $(\bar{u}+\bar{v})\cdot((\bar{u}+2\bar{v})\times(\bar{u}-2\bar{v})) =$

$= (\bar{u}+\bar{v})\cdot(\underbrace{\bar{u}\times\bar{u}}_{0} - 2\bar{u}\times\bar{v} + 2\underbrace{\bar{v}\times\bar{u}}_{-\bar{u}\times\bar{v}} - 4\underbrace{\bar{v}\times\bar{v}}_{0}) =$

$= -4(\bar{u}+\bar{v})\cdot(\bar{u}\times\bar{v}) = -4(\bar{u}\cdot\underbrace{(\bar{u}\times\bar{v})}_{\perp\bar{u}} + \bar{v}\cdot\underbrace{(\bar{u}\times\bar{v})}_{\perp\bar{v}}) = \underline{0}$

"Geometrisk" tolkning:

$\bar{u}+2\bar{v}$ & $\bar{u}-2\bar{v}$ är två vektorer som ligger i planet $\underline{\pi}$ som spänns upp av $\bar{u}$ & $\bar{v}$ $\Rightarrow$ $(\bar{u}+2\bar{v})\times(\bar{u}-2\bar{v})$ är en normalvektor till π.

Eftersom $\bar{u}+\bar{v}$ ligger i π blir därför skalärprodukten 0.

5.16. $\hat{e}_3$ orto mot planet π_1 $\Rightarrow$ $\hat{e}_3$ = normalvektorn

$(1,-1,-1)$ normerad $\Rightarrow$ $\hat{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)$

$\hat{e}_1$ parallell med π_2 $\Rightarrow$ $\hat{e}_1$ orto. mot normal-vektorn $(1,1,2)$. Även orto mot $(1,-1,-1)$:

Vektorprod. ger riktning som fungerar

$(1,1,2)\times(1,-1,-1) = (1,3,-2)$

7 1 2 1 1 2
1 -1 -1 1 -1 7

Välj $\hat{e}_1$ som $(1,3,-2)$ normerad $\Rightarrow$ $\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}(1,3,-2)$

Rätt orientering: $\hat{e}_3 = \hat{e}_1\times\hat{e}_2$ $\Rightarrow$ $\hat{e}_2 = \hat{e}_3\times\hat{e}_1 =$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{14}}(1,-1,-1)\times(1,3,-2) =$

7 -1 -1 1 -1 7
1 3 -2 1 3 -2

$= \frac{1}{\sqrt{42}}(5,1,4)$

För koordinaterna använder vi Sats 4, sid 71
(Eller metoden i uppg 5.18 som alltid fungerar)

$\hat{x}_1 = (1,2,3)\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}(1,3,-2) = \frac{1}{\sqrt{14}}\cdot 1$ Så nya

$\hat{x}_2 = (1,2,3)\cdot\frac{1}{\sqrt{42}}(5,1,4) = \frac{1}{\sqrt{42}}\cdot 19$ koordinater

$\hat{x}_3 = (1,2,3)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1) = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot(-4)$ blir $\left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{19}{\sqrt{42}}, -\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$

5.18. $\hat{e}_1$ parallell med riktn.vektorn $(-2,1,2)$,

normering ger $\hat{e}_1 = \frac{1}{3}(-2,1,2)$

$\hat{e}_2$ parallell med riktn.vektorn $(2,2,1)$,

normering ger $\hat{e}_2 = \frac{1}{3}(2,2,1)$

Funkar då $(-2,1,2)\perp(2,2,1)$? (dvs $(-2,1,2)\cdot(2,2,1)=0$)

$\hat{e}_3 = \hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \frac{1}{3}(-2,1,2)\times\frac{1}{3}(2,2,1) = \frac{1}{9}(-3,6,-6) = \frac{1}{3}(-1,2,-2)$

Koord. för $\overline{OP}$ i $\hat{e}_1\,\hat{e}_2\,\hat{e}_3$: $\begin{matrix}-2&1&2&-2&1&2\\2&2&1&2&2&1\end{matrix}$

$\overline{OP} = \hat{x}_1\hat{e}_1 + \hat{x}_2\hat{e}_2 + \hat{x}_3\hat{e}_3$, eller

$(1,2,3) = \hat{x}_1\frac{1}{3}(-2,1,2) + \hat{x}_2\frac{1}{3}(2,2,1) + \hat{x}_3\frac{1}{3}(-1,2,-2)$

$\iff (3,6,9) = \hat{x}_1(-2,1,2) + \hat{x}_2(2,2,1) + \hat{x}_3(-1,2,-2)$

$$\iff \begin{cases} -2\hat{x}_1 + 2\hat{x}_2 - \hat{x}_3 = 3 \\ \hat{x}_1 + 2\hat{x}_2 + 2\hat{x}_3 = 6 \\ 2\hat{x}_1 + \hat{x}_2 - 2\hat{x}_3 = 9 \end{cases} \iff \dots \iff \begin{cases} \hat{x}_1 = 2 \\ \hat{x}_2 = 3 \\ \hat{x}_3 = -1 \end{cases}$$

Nya koord. blir $P:(2,3,-1)$. Denna metod för koord. funkar för alla basbyten.

Samband basbyte – koord.byte:

$\hat{E} = S^T E \Rightarrow X = S\hat{X} \Rightarrow \hat{X} = S^{-1}X$ (alltid!)

Ortonormerat byte: $S^{-1} = S^T \Rightarrow \hat{X} = S^T X$

Vi har $\hat{E} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&1&2\\2&2&1\\-1&2&-2\end{pmatrix}E$ så vi får

$$\begin{pmatrix}\hat{x}_1\\\hat{x}_2\\\hat{x}_3\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&1&2\\2&2&1\\-1&2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}6\\9\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$$

Om vi har ortonormerat byte kan vi också använda Sats 4 på sid 71: $\hat{x}_i = \overline{OP}\cdot\hat{e}_i$

$\hat{x}_1 = \overline{OP}\cdot\hat{e}_1 = (1,2,3)\cdot\frac{1}{3}(-2,1,2) = \frac{1}{3}\cdot 6 = 2$

$\hat{x}_2 = \overline{OP}\cdot\hat{e}_2 = (1,2,3)\cdot\frac{1}{3}(2,2,1) = \frac{1}{3}\cdot 9 = 3$

$\hat{x}_3 = \overline{OP}\cdot\hat{e}_3 = (1,2,3)\cdot\frac{1}{3}(-1,2,-2) = \frac{1}{3}(-3) = -1$

Detta blir precis samma skalärprodukter som i matrismult. ovan!

5.21. $\overline{PQ} = (1,2,2)$ $\overline{PR} = (2,-2,1)$

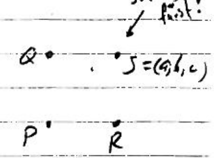
$|\overline{PQ}| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = 3$ $|\overline{PR}| = \sqrt{2^2+(-2)^2+1^2} = 3$

$\overline{PQ}\cdot\overline{PR} = (1,2,2)\cdot(2,-2,1) = 0$ Vi har kommit fram till:

$|\overline{PQ}| = |\overline{PR}|$ och $\overline{PQ}\perp\overline{PR}$, och då måste

P, Q & R ligga på en av kubens

sidor enligt figuren (Tänk!)



$\overline{PQ} = \overline{RS} \iff (1,2,2) = (a,b,c) - (3,0,4) \Rightarrow S:(4,2,6)$

Hörnet T längst bort från P fås genom att "gå längd 3 vinkelrätt från S". Vinkelrätt mot $\overline{PQ}$ & $\overline{PR}$:

$\overline{PQ}\times\overline{PR} = (6,3,-6)$ eller $\bar{v} = (2,1,-2) \Rightarrow |\bar{v}| = 3$

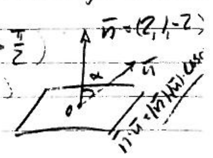
$\overline{OT_1} = \overline{OS} + \bar{v} = (4,2,6) + (2,1,-2) = (6,3,4)$ eller $\overline{OT_2} = \overline{OS} - \bar{v} = (2,1,8)$

Vilka av dessa T ligger på samma sida $2x+y-2z=0$?

$\bar{n}\cdot\overline{OP} = (2,1,-2)\cdot(1,2,3) = -2 < 0$ (dvs $\alpha > \frac{\pi}{2}$)

$\bar{n}\cdot\overline{OT_1} = (2,1,-2)\cdot(6,3,4) = 7 > 0$ ($\alpha < \frac{\pi}{2}$)

$\bar{n}\cdot\overline{OT_2} = (2,1,-2)\cdot(2,1,8) = -11 < 0$ ($\alpha > \frac{\pi}{2}$)



$\Rightarrow T_2:(2,1,8)$ på samma sida som P (Tänk!)

Svar: $(2,1,8)$