1.21a. Bevarande av:

Cr: $2x_1 = y_1$
O: $3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 4y_1 + 2y_2 + 2y_3$
N: $x_2 = y_2$
C: $x_3 = y_3$
−: $x_2 + 2x_3 = 2y_1 + y_2$ <u>eller</u>

$$\begin{cases} 2x_1 - y_1 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 4y_1 - 2y_2 - 2y_3 = 0 \\ x_2 - y_2 = 0 \\ x_3 - y_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - 2y_1 - y_2 = 0 \end{cases}$$

5 ekvationer men 6 obekanta ⟹ <u>icke</u> entydig lösning förväntas. (speciellt då bara O:or i högerledet)

Systemet har mycket riktigt lösningen

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 3t \\ x_3 = 2t \\ y_1 = 2t \\ y_2 = 3t \\ y_3 = 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

<u>t.ex.</u>

$(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = (1, 3, 2, 2, 3, 2)$

2.12. Vi är klara om vi kan visa att

$\overline{A_1B_1} = \overline{D_1C_1}$ och $\overline{B_1C_1} = \overline{A_1D_1}$. (Räcker ena?)

$\overline{A_1B_1} = \overline{A_1B} + \overline{BB_1}$, $\overline{D_1C_1} = \overline{D_1D} + \overline{DC_1}$, så

$\overline{A_1B_1} = \overline{D_1C_1} \iff \overline{A_1B} + \overline{BB_1} = \overline{D_1D} + \overline{DC_1} \iff$

$\overline{A_1B} + \overline{BB_1} - \overline{D_1D} - \overline{DC_1} = \overline{0} \iff \overline{A_1B} + \overline{BB_1} + \overline{C_1D} + \overline{DD_1} = \overline{0}$

$\iff \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC} + \frac{1}{2}\overline{CD} + \frac{1}{2}\overline{DA} = \overline{0} \iff$

$\frac{1}{2}\underbrace{(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA})}_{= \overline{0} \text{ ty "hela varvet runt"}} = \overline{0}$ Stämmer!

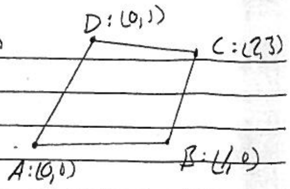
P.s.s. $\overline{B_1C_1} = \overline{A_1D_1}$, så <u>klart</u>?

Prova själv en lösning med mittpunktsformeln:

$\overline{A_1B_1} = \overline{A_1O} + \overline{OB_1} = \overline{OB_1} - \overline{OA_1} =$

$\frac{1}{2}(\overline{OB} + \overline{OC}) + \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB}) = \ldots$ o.s.v.

3.4. I första systemet $A, \overline{AB}, \overline{AD}$:



Att hitta koord. för A i systemet $C, \overline{CB}, \overline{CD}$ innebär att vi skall hitta (x,y) så att <u>$\overline{CA} = x\overline{CB} + y\overline{CD}$</u>. Detta samband skall gälla <u>alla</u> koord.system t.ex. $A, \overline{AB}, \overline{AD}$ ovan som ger $\overline{CA}(-2,-3)$, $\overline{CB}(-1,-3)$, $\overline{CD} = (-2,-2)$

$\Rightarrow (-2,-3) = x(-1,-3) + y(-2,-2) \iff \begin{cases} -x - 2y = -2 \\ -3x - 2y = -3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -x - 2y = -2 \\ 4y = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{4} \end{cases}$

<u>Svar</u>: Koordinaterna är $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$

<u>Alt</u>: Vi vet att $\overline{AC} = 2\overline{AB} + 3\overline{AD} \iff$

$\overline{AC} = 2(\overline{AC} + \overline{CB}) + 3(\overline{AC} + \overline{CD}) \iff -4\overline{AC} = 2\overline{CB} + 3\overline{CD}$

$\iff 4\overline{CA} = 2\overline{CB} + 3\overline{CD} \iff \overline{CA} = \frac{2}{4}\overline{CB} + \frac{3}{4}\overline{CD}$

eller $\underline{\overline{CA} = \frac{1}{2}\overline{CB} + \frac{3}{4}\overline{CD}}$

3.17a. Byt ut ena par. mot s:

$$\begin{cases} 1 + t = s \\ 1 + 2t = 2 + s \\ 1 + 3t = 6 - 2s \end{cases} \iff \begin{cases} s - t = 1 \\ s - 2t = -1 \\ -2s - 3t = 1 - b \end{cases} \iff \begin{cases} s - t = 1 \\ -t = -2 \\ -5t = 3 - b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} s - t = 1 \\ -t = -2 \\ 0 = 13 - b \end{cases} \iff \begin{cases} s = 3 \\ t = 2 \\ b = 13 \end{cases} \leftarrow \text{(behövs för } \underline{\text{koll}}\text{.)}$$

<u>Svar</u>: $b = 13$

b. Vi har punkt t.ex. $(1,1,1)$ och rikt.vektorerna $(1,2,3) \,\&\, (1,1,-2)$. Ekv på parameterform:

$$\begin{cases} x = 1 + s + t \\ y = 1 + 2s + t \\ z = 1 + 3s - 2t \end{cases} \overset{\text{till affin:}}{\iff} \begin{cases} x = 1 + s + t \\ y - 2x = -1 - t \\ z - 3x = -2 - 5t \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x = 1 + s + t \\ y - 2x = -1 - t \\ z - 3x - 5(y - 2x) = 3 \end{cases} \iff 7x - 5y + z - 3 = 0$$

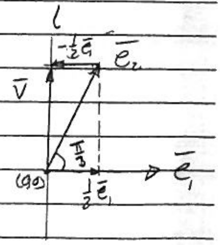
<u>Svar</u>: $7x - 5y + z - 3 = 0$

3.25. Eftersom l är parallell med yz-planet så har alla punkter på l samma x-värde $(=1)$, dvs. l ligger i planet $x=1$. Skärning mellan linjen $(x,y,z)=(2,3,1)+t(3,2,2)$ & planet $x=1$:

$2+3t=1 \iff t=-\frac{1}{3} \Rightarrow$ punkten $(1,\frac{7}{3},\frac{1}{3})$

Två punkter på l $\Rightarrow$ riktn.vektor $(1,2,5)-(1,\frac{7}{3},\frac{1}{3})=$
$=(0,-\frac{1}{3},\frac{14}{3})$ eller $(0,-1,14)$

Svar: $(x,y,z)=(1,2,5)+t(0,-1,14)$



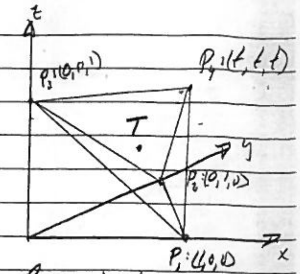
(3.26) Riktningsvektorn $\bar{v}=\bar{e}_2-\frac{1}{2}\bar{e}_1$ har koord. $(-\frac{1}{2},1)$. En punkt: $(0,0)$

$\Rightarrow l:(x_1,x_2)=(0,0)+t(-\frac{1}{2},1)$. Till affin form:

$\begin{cases} x_1=-\frac{1}{2}t \\ x_2=t \end{cases} \Rightarrow 2x_1+x_2=0$

OBS! Linjer kan skrivas på affin form i planet, ej i rummet!

4.14 Metan CH_4



Placera 3 av tetraederns hörn "lika långt ifrån varandra", t.ex. i $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ & $(0,0,1)$

4:e hörnet måste vara (t,t,t) för något t (tänk!?)

Vi skall ha t.ex. $|\overline{P_1P_2}|=|\overline{P_1P_4}| \iff |(-1,1,0)|=|(t-1,t,t)|$

$\Rightarrow \sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}=\sqrt{(t-1)^2+t^2+t^2} \Rightarrow$ (kvadrering)

$2=t^2-2t+1+t^2+t^2 \iff 3t^2-2t-1=0 \iff$

$t^2-\frac{2}{3}t-\frac{1}{3}=0 \iff t=\frac{1}{3}\pm\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{3}{9}}=\frac{1}{3}\pm\frac{2}{3} \iff \begin{cases} t_1=1 \\ t_2=-\frac{1}{3} \end{cases}$

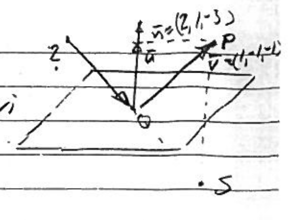
Välj $P_4:(1,1,1)$. Tyngdpunktsformeln: $\overline{OT}=\frac{1}{4}(\overline{OP_1}+\overline{OP_2}+\overline{OP_3}+\overline{OP_4})=$
$=\frac{1}{4}((1,0,0)+(0,1,0)+(0,0,1)+(1,1,1))=\frac{1}{4}(2,2,2)=\frac{1}{2}(1,1,1) \Rightarrow T:\frac{1}{2}(1,1,1)$

Sök vinkel mellan t.ex. $\overline{TP_1}=\frac{1}{2}(1,-1,-1)$ & $\overline{TP_2}=\frac{1}{2}(-1,1,-1)$

$\overline{TP_1}\cdot\overline{TP_2}=\frac{1}{2}(1,-1,-1)\cdot\frac{1}{2}(-1,1,-1)=\frac{1}{4}(-1)$ $|\overline{TP_1}|=\frac{1}{2}\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{3}=|\overline{TP_2}|$

$\cos\alpha=\frac{\overline{TP_1}\cdot\overline{TP_2}}{|\overline{TP_1}||\overline{TP_2}|}=\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}}=-\frac{1}{3}$ Svar: α så att $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$
$(\alpha\approx 109°)$

4.37.



Planet går genom origo, så vi antar ljusstrålen går in där.

Vi söker spegelbilden S av $P:(1,-1,-1)$

$\bar{u}=\frac{\overline{OP}\cdot\bar{n}}{|\bar{n}|^2}\cdot\bar{n}=\frac{(1,-1,-1)\cdot(2,1,-3)}{2^2+1^2+(-3)^2}\cdot(2,1,-3)=$
$=\frac{4}{14}(2,1,-3)=\frac{2}{7}(2,1,-3)$

$\overline{OS}=\overline{OP}-2\bar{u}=(1,-1,-1)-\frac{4}{7}(2,1,-3)=\frac{1}{7}(-1,-11,5)$

$\Rightarrow S:\frac{1}{7}(-1,-11,5)$

Riktningen är t.ex. $\overline{OS}=\frac{1}{7}(-1,-11,5)$ eller
$(-1,-11,5)$

Svar: $(-1,-11,5)$