Minsta kvadratmetoden

Vi studerar systemet $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + 3x_2 = -1 \end{cases}$

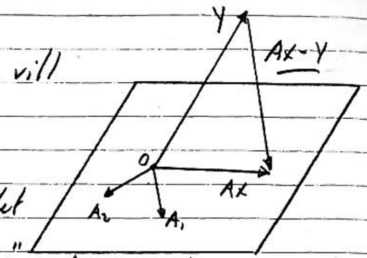
dvs. $AX = Y$ med

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Systemet är överbestämt (fler ekv. än obekanta) så som väntat finns ingen lösn. Vi vill dock hitta en vektor X sådan att "felet" blir så litet som möjligt, dvs. så att skillnaden $|AX-Y|$ minimeras.

Alla möjliga $AX = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} x_2$ blir precis planet som kolonnerna i A, dvs $A_1 = (2\ 3\ 1)^T$ och $A_2 = (1\ {-1}\ 3)^T$, spänner upp.

Vi tolkar situationen geometriskt:



$|AX-Y|$ som vi vill minimera är alltså avståndet "från Y till AX", och AX ligger i planet.

Eftersom det kortaste avståndet från "en viss punkt ner till ett plan" går i normalens riktning så skall alltså $AX-Y$ vara vinkelrät mot planet, eller

$AX-Y$ ortogonal mot både A_1 och A_2

$$AX - Y = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - 1 \\ 3x_1 - x_2 - 2 \\ x_1 + 3x_2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$ (kolonnmatris), så

ortogonaliteten ovan kan uttryckas

$$A_1 \cdot (AX-Y) = (2,3,1) \cdot (r_1, r_2, r_3) = 0$$
$$A_2 \cdot (AX-Y) = (1,-1,3) \cdot (r_1, r_2, r_3) = 0,$$

vilket kan sammanfattas i matrismultiplikationen $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{A^T} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Vi har alltså kommit fram till att $A^T(AX-Y) = 0$, eller $\boxed{A^TAX = A^TY}$

Detta kalles normalekvationen till vårt system. Vi får

$$A^TA = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}, \quad A^TY = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

så $A^TAX = A^TY$ blir $\begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$,

vilket har lösning $\begin{cases} x_1 = 0{,}5667 \\ x_2 = -0{,}4667 \end{cases}$

Detta är alltså vår approximativa lösning till systemet. (Kolla gärna själv i Matlab hur "bra" den är)

Ex: Kurvanpassning

Vi söker ett linjärt samband $y = kx + m$ utifrån mätdata

x	1	2	3	4	5
y	3	5	8	9	13

Vi söker alltså k och m sådana att

$$\begin{cases} k \cdot 1 + m = 3 \\ k \cdot 2 + m = 5 \\ k \cdot 3 + m = 8 \\ k \cdot 4 + m = 9 \\ k \cdot 5 + m = 13 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix}}_{Y}$$

Detta har ingen lösning, så vi använder metoden ovan för att hitta en approximativ.

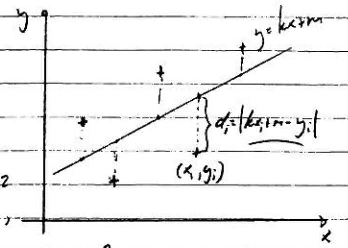
Vi får $A^TA = \begin{pmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 5 \end{pmatrix}$, $A^TY = \begin{pmatrix} 138 \\ 38 \end{pmatrix}$,

och $A^TA\begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = A^TY$ har lösningen $\begin{cases} k = 2{,}4 \\ m = 0{,}4 \end{cases}$.

Sambandet blir alltså $y = 2{,}4x + 0{,}4$

I m-filen till dagens föreläsning finns exemplet löst, samt mätvärdena och linjen $y = 2{,}4x + 0{,}4$ plottade.

Att minimera $\left|A\binom{k}{m} - Y\right|$ är samma sak som att minimera $\left|A\binom{k}{m} - Y\right|^2$,



och med beteckningarna i figuren gäller det att $\left|A\binom{k}{m} - Y\right|^2 = d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2$. (Vi hade $n = 5$)

Metoden vi gått igenom idag kallas därför

<u>minsta kvadratmetoden</u>

<u>Anm</u>: Vi kan inte bara anpassa till linjer, utan även till exempelvis $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$, $y = a\cos x + b\sin x$ eller annan "summa" av funktioner.

<u>Fråga</u>: Om vi vill anpassa ett polynom sådant att grafen går genom alla våra mätpunkter ovan, vilken grad skall detta då ha?

<u>Ledning</u>: Våra <u>5</u> mätpunkter gav <u>5</u> ekvationer, och vårt <u>1</u>:a-grads-polynom gav <u>2</u> koefficienter, dvs. <u>2</u> obekanta. Vad krävs för att systemet vi får skall gå "jämnt upp"?