**LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA**
**MATEMATIK**

**TENTAMENSSKRIVNING**
**LINJÄR ALGEBRA**
**2011-12-13 kl 14–19**

*INGA HJÄLPMEDEL.*
*Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Alla koordinatsystem får antas vara ortonormerade och positivt orienterade.*

**1.** Lös, för varje värde på $a$, ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax - y + z = 0 \\ x - ay - z = 0 \end{cases}.$$

**2.** **a)** Bestäm en ekvation på affin form för planet $\pi$ genom punkterna

$$P_1 : (1,0,1), \quad P_2 : (1,1,3), \quad \text{och} \quad P_3 : (3,-1,1). \qquad (0.3)$$

**b)** Bestäm skärningen mellan planet $\pi$ ovan och linjen som går genom punkterna

$$P_4 : (1,4,3) \quad \text{och} \quad P_5 : (4,6,4). \qquad (0.3)$$

**c)** Ange den punkt i $\pi$ som ligger närmast $P_5$, dvs. finn den ortogonala projektionen av punkten $P_5$ på planet $\pi$. (0.4)

**3.** Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

**a)** Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till $A$. (0.5)

**b)** Diagonalisera $A$, dvs. ange en inverterbar matris $S$ och en diagonalmatris $D$ sådana att $S^{-1}AS = D$. (0.2)

**c)** Lös matrisekvationen $(AX - I)^T = A$. (0.3)

**4.** Bestäm en positivt orienterad ortonormerad bas $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ sådan att

$\hat{\mathbf{e}}_1$ är ortogonal mot planet $\pi : 2x + 2y + z = 0$ och
$\hat{\mathbf{e}}_2$ är ortogonal mot linjen $l : (x,y,z) = (1,0,2) + t(2,3,2)$.

Bestäm också en ekvation för $\pi$ i den nya basen $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$.

**5.** Låt $F$ vara en linjär avbildning som avbildar vektorerna

$$(1,0,0),\ (1,1,0) \text{ och } (1,1,1) \qquad \text{på} \qquad (2,1,0),\ (0,0,1) \text{ respektive } (0,-1,3).$$

Låt vidare $G$ vara avbildningen som speglar rummets vektorer i $xz$-planet, dvs. i planet $y = 0$. Låt slutligen $H$ vara den sammansatta avbildning som innebär att vi först tillämpar $F$ och därefter $G$.

**a)** Bestäm avbildningsmatrisen för $H$. (0.8)

**b)** Blir volymen av en parallellepiped större eller mindre då vi tillämpar $H$ på den? (0.2)

Var god vänd!

**6.** Antag att vi vrider rummets vektorer vinkeln $\theta$ kring linjen $(x, y, z) = t\,(319, -512, 267)$, i positiv led sett från spetsen av vektorn $(319, -512, 267)$, och låt $A$ vara avbildningsmatrisen för denna avbildning.

**a)** Bestäm, för varje värde på $\theta$, rangen av $A$. (0.3)

**b)** Bestäm, för varje värde på $\theta$, alla (reella) egenvärden till $A$. (0.3)

**c)** Bestäm, för varje värde på $\theta$, huruvida $A$ är diagonaliserbar eller ej. (0.4)

*GOD JUL!*