Matkomm. LP2 Förel. 2

2012-11-07

Uppdaterad bevis för
att kontinuerlig funktion
def. på slutet och
begränsad intervall är begränsad.

Därtill en övning:
Bevisa Bolzano-Weierstrass
sats utan intervallinkapsling!

Matkomm. Förel. 2

I förra föreläsningen presenterades Kontinuitetsaxiomet, som särskiljar de reella talen, $\mathbb{R}$, från t.ex. mängden av alla rationella tal $\mathbb{Q}$. #

Därnäst bevisades den Cantorska satsen om intervallinkapsling: En svit av slutna, icke-tomma intervall, $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$, som är inkapslade,

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots,$$

och där intervallängden $|I_n| \to 0$, då $n \to \infty$, har precist ett tal $\xi \in \mathbb{R}$ gemensamt, $\xi \in I_n$ för alla n. #

Med hjälp av intervallinkapsling kunna vi sen bevisa den för analysen fundamentala satsen om mellanliggande värden:

"Om $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig och ett tal $y \in \mathbb{R}$ uppfyller $f(a) \leq y \leq f(b)$, då finns minst ett reellt tal $\xi \in [a,b]$ så att

$$f(\xi) = y.$$ #

Kom ihåg att f är kontinuerlig på $[a,b]$ om det för varje $x_0 \in [a,b]$ gäller att $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. #

__Sats__ Om en funktion $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig, så är f begränsad.

__Bevis__ Genom att ersätta f med $|f|$ inser man att vi alltid kan anta att $f \geq 0$.

Vi använder ett motsägelsebevis och antar därför att f är obegränsad. Vi ska visa att det leder till en motsägelse.

Låt $a_1 = a$, $b_1 = b$ och $I = [a_1, b_1]$. Sätt $c = (a_1+b_1)/2$, dvs. I_1:s mittpunkt. Eftersom att f är obegränsad följer det att f måste vara obegränsat på antingen intervallet $[a,c]$ eller $[c,b]$ eller båda.

Låt $I_2 = [a_2, b_2]$ beteckna det intervallet där f är obegränsad (om det gäller båda intervallhalvor, välj ett av dom godtyckligt!)

Konstruera I_3 utifrån I_2, och allmänt I_{n+1} utifrån I_n, på samma sätt som I_2 konstruerades utifrån I_1. Då fås en svit av inkapslade intervall:

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \ldots$$

där $|I_n| = b_n - a_n = (b-a)/2^{n-1} \to 0, n \to \infty$.

Enligt intervallinkapslingssatsen finns ett unikt tal $\xi \in [a,b]$ så

$$\xi \in I_n \text{ för alla } n.$$

Speciellt gäller $a_n \to \xi$ och $b_n \to \xi$ då $n \to \infty$.

(B, forts.) Eftersom att f är obegränsad på varje intervall I_n, så finns det en punkt $x_n \in I_n$ sådan att

$$(\star) \qquad f(x_n) > n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Eftersom att

$$x_n \in I_n \iff a_n < x_n \leq b_n$$

och $b_n - a_n \to 0$, följer det att

$$x_n \to \xi \text{ då } n \to \infty.$$

Men nu är ju f kontinuerlig, så därför gäller

$$\mathbb{R} \ni f(\xi) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \infty,$$

pga. $(\star)$. Denna motsägelse kommer av att vi antog att f är obegränsad.

Alltså måste f vara begränsad, som påstått, och beviset är klart. #

<u>Övning</u> (Bolzano-Weierstrass sats) Om $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ är en talföljd i det begränsade intervallet $I = [a, b]$, då finns en <u>delföljd</u> $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ till $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, som är konvergent, det vill säga att $y_k \to y$ då $k \to \infty$ för något tal $y \in [a, b]$. #

<u>Anm</u> Att $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ är en delföljd till $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ betyder att det finns indices n_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$ så att $y_k = x_{n_k}$. #