

Instuderingsfrågor i Linjär algebra

Anvisningar. Avsikten med dessa frågor är att ge Dig möjlighet att kontrollera att Du någorlunda behärskar kursen. Om Du märker att Du inte kan svara på någon av de här frågorna bör Du gå tillbaka till motsvarande avsnitt i läroboken, eftersom det är troligt att Du behöver repetera detta.

Kapitel 1. Linjära ekvationssystem

1. Hur löser man ett ekvationssystem med Gausselimination?
2. Hur märker man under lösningens gång om systemet a) saknar lösningar, b) har parameterlösning, eller c) har entydig lösning?

Kapitel 2. Geometriska vektorer

3. Vad menas med en vektor? Hur definieras räkneoperationerna för vektorer? Ange några räknelagar.
4. Härled formeln för $\overrightarrow{OM}$ där M är

   a) mittpunkten på en sträcka AB,

   b) masscentrum för en triangel ABC.
5. Vad menas med en bas för vektorerna i rummet? För vektorerna i planet?
6. Visa att om $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ är en bas i planet så kan varje vektor $\boldsymbol{u}$ entydigt skrivas $\boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$. Vad kallas talparet (x_1, x_2)?
7. Formulera och besvara fråga 6 för vektorerna i rummet.
8. Vad menas med att ett antal vektorer $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_p$ är linjärt beroende? Skriv upp och härled ett ekvivalent villkor.
9. Karakterisera geometriskt två respektive tre linjärt beroende vektorer.
10. Vad kan sägas i fråga om linjärt beroende/oberoende för tre vektorer i planet respektive fyra vektorer i rummet? Varför?
11. Antag att sambandet mellan två baser $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ och $\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$, $\boldsymbol{e}'_3$ ges av

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}'_1 = s_{11}\boldsymbol{e}_1 + s_{21}\boldsymbol{e}_2 + s_{31}\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_2 = s_{12}\boldsymbol{e}_1 + s_{22}\boldsymbol{e}_2 + s_{32}\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_3 = s_{13}\boldsymbol{e}_1 + s_{23}\boldsymbol{e}_2 + s_{33}\boldsymbol{e}_3. \end{cases}$$

    Hur uttrycks då koordinaterna (x_1, x_2, x_3) i (x'_1, x'_2, x'_3)? Hur förfar man om man i stället vill uttrycka (x'_1, x'_2, x'_3) i (x_1, x_2, x_3)?

Kapitel 3. Linjer och plan

12. Vad menas med ett koordinatsystem i rummet respektive planet? Hur definieras koordinaterna för en punkt?
13. Ge ekvationer för de tre koordinatplanen i rummet, och för de tre koordinataxlarna.
14. Hur beräknar man koordinaterna för vektorn $\overrightarrow{PQ}$ om man känner koordinaterna för punkterna P och Q?
15. Vad menas med linjens ekvation i parameterform.
16. Vad menas med planets ekvation i parameterform.
17. Hur kommer man från planets ekvation i parameterform till den affina form (även kallad *normalform*) $ax + by + cz + d = 0$? Åt andra hållet?
18. Hur ser man om två linjer i rummet är parallella?

19. Hur ser man om två plan på affin form är parallella?
20. Hur går man tillväga för att bestämma eventuella skärningspunkter mellan två linjer?, två plan?, ett plan och en linje?
21. Tre plan är sådana att ingen punkt ligger i alla tre planen. Vilka olika geometriska situationer kan då föreligga?
22. Hur undersöker man om en vektor är parallell med ett plan?

Kapitel 4. Skalärprodukt

23. Definiera skalärprodukten $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ mellan två vektorer.
24. Uttryck längden $|\boldsymbol{u}|$ av $\boldsymbol{u}$ med hjälp av skalärprodukt.
25. Karakterisera ortogonala vektorer med hjälp av skalärprodukt.
26. Skriv upp räknereglerna för skalärprodukt. Bevis?
27. Vad menas med en ortonormerad bas? Skriv upp och härled formeln för skalärprodukten i en ON-bas.
28. Visa att $x_k = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{e}_k$, $k=1,2,3$, om $\boldsymbol{u}$ har koordinaterna (x_1, x_2, x_3) i ON-basen $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.
29. Hur beräknar man avståndet mellan två punkter? Hur beräknar man vinkeln mellan två vektorer?
30. Skriv upp ekvationen för en sfär med centrum i (a_1, a_2, a_3) och radie r. (ON-system)
31. Hur beräknar man vinkeln mellan a) två linjer, b) två plan, c) ett plan och en linje?
32. Härled ett samband mellan ekvationen på affin form (normalform) för ett plan och dess normalriktning. (ON-system). Vad gäller för linjer i planet?
33. a) Hur beräknar man avståndet från en punkt till ett plan? Härledning?

    b) Hur går man tillväga för att beräkna avståndet från en punkt till en linje i rymden?
34. Hur använder man projektionsformeln för att

    a) dela upp en vektor i ortogonala komposanter,

    b) göra ortogonal projektion i plan,

    c) göra spegling i plan.

Kapitel 5. Vektorprodukt

35. Definiera vektorprodukten $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ mellan två vektorer.
36. Tolka den skalära trippelprodukten $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}$ geometriskt. Hur ändras värdet om man ändrar ordningen av $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$? (Vad menas med ett parallellepiped?)
37. Skriv upp räknereglerna för vektorprodukt.
38. Hur beräknas $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ om $\boldsymbol{u} = (x_1, x_2, x_3)$ och $\boldsymbol{v} = (y_1, y_2, y_3)$ med koordinater i en högerorienterad ortonormerad bas? Härledning?
39. Hörnen till en triangel i rymden är kända. Hur beräknas arean?
40. Hur kan man förfara för att bestämma avståndet mellan två linjer i rymden?

Kapitel 6. Rummet $\mathbf{R}^n$

41. Hur definieras $\lambda \boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ då $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$?
42. Definiera begreppet bas i $\mathbf{R}^n$. Ge exempel på en bas i $\mathbf{R}^5$.
43. a) Vad menas med att vektorerna $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p$ är linjärt oberoende i $\mathbf{R}^n$?

    b) Vad menas med att vektorerna $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p$ spänner upp $\mathbf{R}^n$?
44. Formulera bassatsen.

Kapitel 7. Matriser

45. Definiera operationerna $\lambda\mathsf{A}$, $\mathsf{A}+\mathsf{B}$, AB för matriser. Vilka krav måste man ställa på typerna för att dessa operationer skall vara definierade?

46. Vad menas med radmatris, kolonnmatris, diagonalmatris, nollmatris, enhetsmatris?

47. Skriv upp några räkneregler för matrismultiplikation. Ange några regler som normalt *inte* gäller. Ge exempel.

48. Vad menas med A^T? Ge en formel för $(\mathsf{AB})^T$.

49. Hur kan man skriva ett linjärt ekvationssystem med hjälp av matriser? Hur kan man skriva det i vektorform?

50. Bevisa satsen: A:s kolonnvektorer utgör en bas $\iff$ $\mathsf{AX}=\mathsf{O}$ har bara den triviala lösningen $\mathsf{X}=\mathsf{O}$ $\iff$ $\mathsf{AX}=\mathsf{Y}$ är lösbart för alla Y. (A är en kvadratisk matris.)

51. Visa att för en enhetsmatris I är $\mathsf{AI}=\mathsf{A}$ och $\mathsf{IB}=\mathsf{B}$, om A och B är av sådan typ att dessa produkter är definierade.

52. a) Definiera begreppet invers matris.

    b) Visa att inversen är entydigt bestämd då den existerar.

53. Bevisa formler för $(\mathsf{A}^T)^{-1}$ och $(\mathsf{AB})^{-1}$.

54. Visa att om A har båda vänster- och högerinvers så är A inverterbar.

55. Visa att om en kvadratisk matris A har vänster- eller högerinvers så är A inverterbar.

56. Komplettera satsen i fråga 50 med ett villkor som har med inverterbarhet att göra. Bevis?

57. Ge en formel för den entydiga lösningen till $\mathsf{AX}=\mathsf{Y}$ då A är inverterbar.

58. Hur går man i praktiken till väga för att bestämma en matrisinvers?

59. Formulera svaret på fråga 11 med hjälp av matriser.

60. Vad menas med en ortogonal matris?

61. Skriv upp några villkor som är ekvivalenta med att A är ortogonal. Ge bevis.

62. Hur beräknar man på enklaste sätt inversen till en ortogonal matris?

63. Vilket samband råder mellan lösningarna till ekvationssystemet $\mathsf{AX}=\mathsf{Y}$ och lösningarna till motsvarande homogena system $\mathsf{AX}=\mathsf{O}$? Bevis?

64. a) Vad menas med nollrummet till matrisen A? Vad menas med nolldimension?

    b) Vad menas med kolonnrummet till en matris A? Vad menas med rangen av A?

65. Formulera dimensionssatsen.

66. Förklara varför följande är sant: ju fler parametrar det finns i lösningen till det homogena systemet $\mathsf{AX}=0$, ju färre högerled Y finns det för vilka det motsvarande inhomogena systemet $\mathsf{AX}=\mathsf{Y}$ har en lösning.

Kapitel 8. Linjära avbildningar

67. Vad menas med att en avbildning från $\mathbf{R}^n$ till $\mathbf{R}^m$ är linjär? Ge exempel på en avbildning (till exempel från $\mathbf{R}^2$ till $\mathbf{R}^2$) som inte är linjär.

68. Låt F vara den linjära avbildning från $\mathbf{R}^2$ till $\mathbf{R}^2$ som i någon bas ges av matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

    a) Hur finner man $F(\boldsymbol{x})$ om $\boldsymbol{x}=(5,6)$?

    b) Hur finner man de $\boldsymbol{x}$ för vilka $F(\boldsymbol{x})=(7,8)$?

69. Visa att $\boldsymbol{y}=F(\boldsymbol{x})$, F linjär $\iff$ $\mathsf{Y}=\mathsf{AX}$ för någon matris A.

70. Kolonnvektorerna i matrisen för en linjär avbildning har en speciell tolkning. Vilken?

71. Vilken är den geometriska innebörden av den linjära avbildning i planet som har matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$?

72. Hur går man till väga för att bestämma matrisen för

a) en projektion på ett plan, b) en spegling i ett plan, c) en rotation?

73. Karakterisera matrisen för en isometrisk linjär avbildning. Bevis?

74. Hur bestämmer man matrisen för en sammansatt linjär avbildning $F \circ G$?

75. Visa att den linjära avbildningen F är bijektiv (vad betyder det?) då och endast då dess matris A är inverterbar. Vilken matris har avbildningen F^{-1}?

76. Förklara innebörden av basbytesformeln $\mathsf{A}' = \mathsf{S}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{S}$. Genomför härledningen.

Kapitel 9. Determinanter

77. Definiera $\det \mathsf{A}$ då A är en kvadratisk matris av ordning 2 eller 3.

78. Formulera och bevisa ett samband mellan 3×3-determinant och volym (2×2-determinant och area).

79. Visa att $\det \mathsf{A} \neq 0 \iff \mathsf{A}$:s kolonnvektorer är linjärt oberoende.

80. Skriv upp de fem räknelagarna för determinanter.

81. Finns det någon formel för $\det(\mathsf{A}+\mathsf{B})$?, för $\det(\mathsf{A}\mathsf{B})$?

82. Visa att $\det(\mathsf{A}^{-1}) = \dfrac{1}{\det \mathsf{A}}$.

83. Redogör för utveckling av determinant efter rad och kolonn.

84. Definiera adjunkten till en matris A, och ge en formel för A^{-1}. Vad får man då $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$?

85. Formulera Cramers regel för lösning av ekvationssystem. Bevis?

86. Skriv upp sex villkor som är ekvivalenta med att $\det \mathsf{A} \neq 0$ (huvudsatsen). Repetera bevisen.

87. Vad kan man säga om ekvationssystemen $\mathsf{AX} = \mathsf{Y}$ och $\mathsf{AX} = \mathsf{O}$

a) då $\det \mathsf{A} \neq 0$, b) då $\det \mathsf{A} = 0$?

88. Hur kan man skriva upp ekvationen för ett plan med hjälp av determinanter?

89. Hur kan man tolka $\det \mathsf{A}$ då $\mathsf{X} \longmapsto \mathsf{AX}$ är en linjär avbildning i rummet. Bevis?

90. Hur går man tillväga för att beräkna determinanter av högre ordning än 3?

Kapitel 10. Egenvärden och egenvektorer

91. Definiera begreppen egenvärde och egenvektor för en linjär avbildning (matris). Ge några geometriska exempel.

92. Hur beräknar man egenvärden och egenvektorer till en matris?

93. a) Vad menas med att en linjär avbildning är diagonaliserbar? Vad betyder detta för avbildningens matris? Vad har det med egenvärden och egenvektorer att göra?

b) Ge (minst ett) exempel på en diagonaliserbar matris och på en matris som inte kan diagonaliseras.

94. Ange några allmänna fall då man vet att matrisen A kan diagonaliseras.