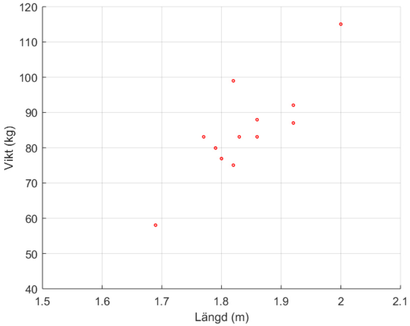
Linjär algebra förel. 10
Minsta kvadratmetoden

Niels Chr. Overgaard

2015-09-22

Data från 12 vuxna män

vikt (kg)	längd (m)
58	1,69
83	1,77
80	1,79
77	1,80
99	1,82
75	1,82
83	1,83
83	1,86
88	1,86
87	1,92
92	1,92
115	2,00



BMI

BMI (Body Mass Index) beräknas enligt formeln:

$$\text{BMI} = \frac{\text{vikt}}{\text{längd} \times \text{längd}} \qquad \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\right]$$

För personer med normal vikt gäller:

$$18,5 \leq \text{BMI} < 25$$

BMI är alltså relativt konstant.
Vi vill undersöka om vi kan hitta en konstant k sådan att

$$\text{vikt} = k \times (\text{längd})^2$$

Då kommer k vara en skattning av försökspopulationens BMI.

BMI

BMI (Body Mass Index) beräknas enligt formeln:

$$\text{BMI} = \frac{\text{vikt}}{\text{längd} \times \text{längd}} \qquad \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\right]$$

För personer med normal vikt gäller:

$$18,5 \leq \text{BMI} < 25$$

BMI är alltså relativt konstant.
Vi vill undersöka om vi kan hitta en konstant k sådan att

$$\text{vikt} = k \times (\text{längd})^2$$

Då kommer k vara en skattning av försökspopulationens BMI.

BMI

BMI (Body Mass Index) beräknas enligt formeln:

$$\text{BMI} = \frac{\text{vikt}}{\text{längd} \times \text{längd}} \qquad \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\right]$$

För personer med normal vikt gäller:

$$18,5 \leq \text{BMI} < 25$$

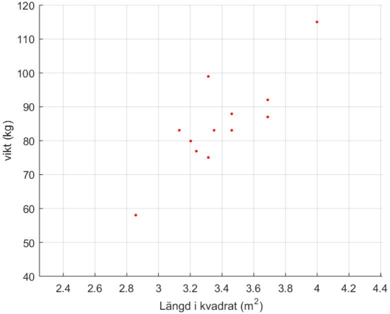
BMI är alltså relativt konstant.
Vi vill undersöka om vi kan hitta en konstant k sådan att

$$\text{vikt} = k \times (\text{längd})^2$$

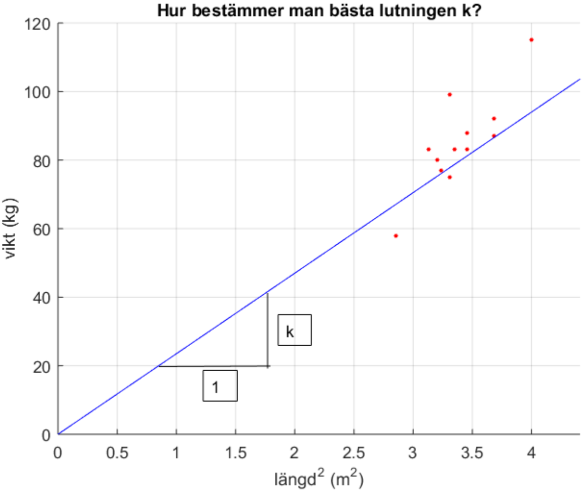
Då kommer k vara en skattning av försökspopulationens BMI.

Transformation av data

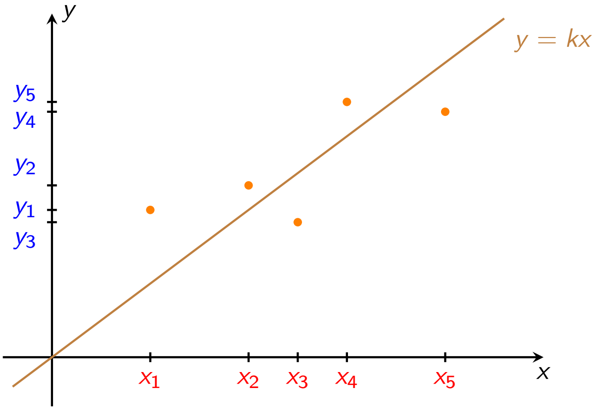
y = vikt (kg)	x = längd^2 (m^2)
58	2,86
83	3,13
80	3,20
77	3,24
99	3,31
75	3,31
83	3,35
83	3,46
88	3,46
87	3,69
92	3,69
115	4,00



Vilken är den bästa räta linjen (genom origo)?

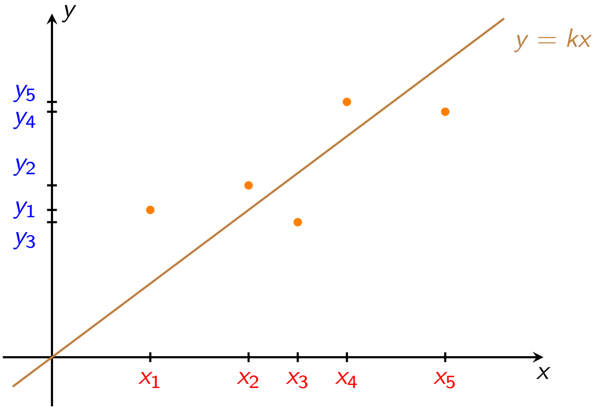


Problemformulering (principskiss)



Hur väljar man lutningen k så att den räta linjen bäst beskriver mätdata?

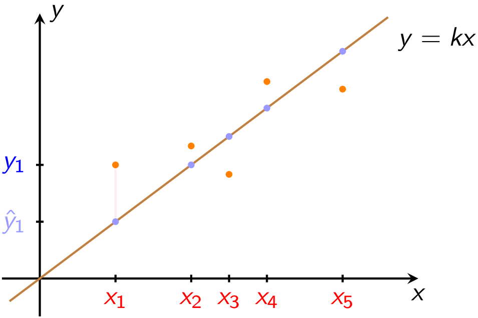
Problemformulering (principskiss)



Hur väljar man lutningen k så att den räta linjen bäst beskriver mätdata?

Modell och residualer

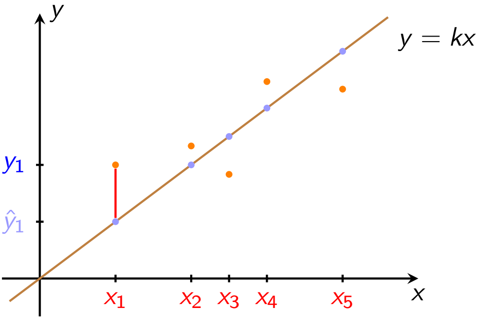
För ett givet val av k kommer modellen att göra följande prediktioner:



$\text{Fel} = (y_1 - \hat{y}_1)^2$

Modell och residualer

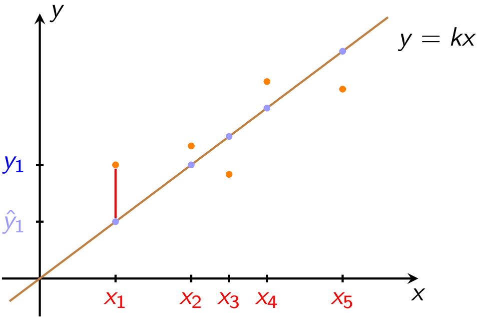
För ett givet val av k kommer modellen att göra följande prediktioner:



$\text{Fel} = (y_1 - \hat{y}_1)^2$

Modell och residualer

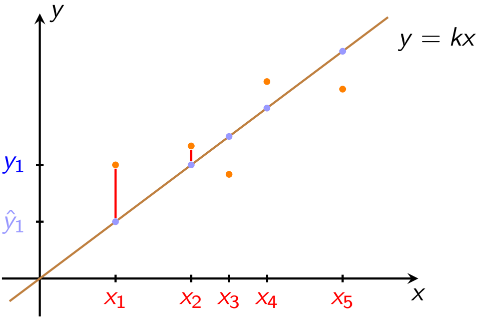
För ett givet val av k kommer modellen att göra följande prediktioner:



$\text{Fel} = (y_1 - \hat{y}_1)^2$

Modell och residualer

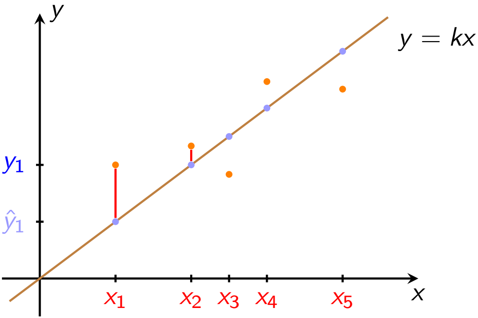
För ett givet val av k kommer modellen att göra följande prediktioner:



Fel $= (y_1 - \hat{y}_1)^2 + (y_2 - \hat{y}_2)^2$

Modell och residualer

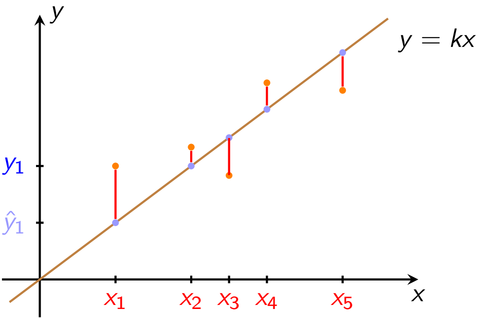
För ett givet val av k kommer modellen att göra följande prediktioner:



$$\text{Fel} = (y_1 - \hat{y}_1)^2 + (y_2 - \hat{y}_2)^2$$

Modell och residualer

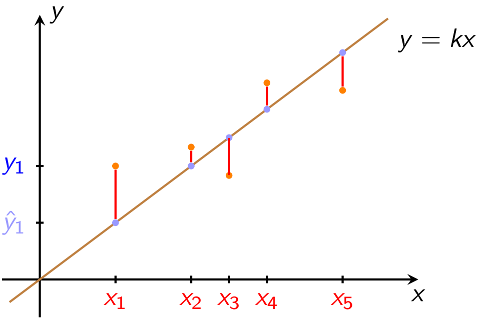
För ett givet val av k kommer modellen att göra följande prediktioner:



$$\text{Fel} = (y_1 - \hat{y}_1)^2 + (y_2 - \hat{y}_2)^2 + (y_3 - \hat{y}_3)^2 + (y_4 - \hat{y}_4)^2 + (y_5 - \hat{y}_5)^2$$
$$= (y_1 - kx_1)^2 + (y_2 - kx_2)^2 + (y_3 - kx_3)^2 + (y_4 - kx_4)^2 + (y_5 - kx_5)^2$$

Modell och residualer

För ett givet val av k kommer modellen att göra följande prediktioner:

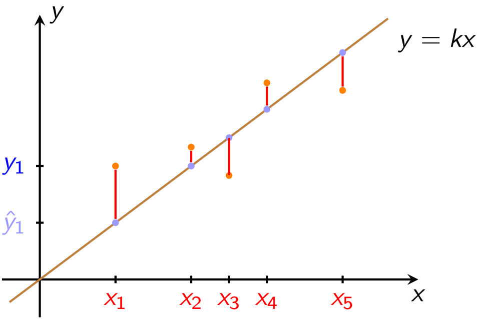


$$\text{Fel} = (y_1 - \hat{y}_1)^2 + (y_2 - \hat{y}_2)^2 + (y_3 - \hat{y}_3)^2 + (y_4 - \hat{y}_4)^2 + (y_5 - \hat{y}_5)^2$$

$$= (y_1 - kx_1)^2 + (y_2 - kx_2)^2 + (y_3 - kx_3)^2 + (y_4 - kx_4)^2 + (y_5 - kx_5)^2$$

Modell och residualer

För ett givet val av k kommer modellen att göra följande prediktioner:



$$
\begin{aligned}
\text{Fel} &= (y_1 - \hat{y}_1)^2 + (y_2 - \hat{y}_2)^2 + (y_3 - \hat{y}_3)^2 + (y_4 - \hat{y}_4)^2 + (y_5 - \hat{y}_5)^2 \\
&= (y_1 - kx_1)^2 + (y_2 - kx_2)^2 + (y_3 - kx_3)^2 + (y_4 - kx_4)^2 + (y_5 - kx_5)^2
\end{aligned}
$$

Minsta kvadratmetoden: Problemformulring

Problem: Bestäm det värde på lutningen k som gör att

$$\text{Fel} = (y_1 - kx_1)^2 + (y_2 - kx_2)^2 + (y_3 - kx_3)^2 + (y_4 - kx_4)^2 + (y_5 - kx_5)^2$$

blir så liten som möjligt.

Introducerar vektorerna

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \quad \text{och} \quad \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \in \mathbb{R}^5$$

och observera att $k\boldsymbol{x} = (kx_1, kx_2, kx_3, kx_4, kx_5)$. Problemet ovan blir:

Problem´:

Bestäm $k^* \in \mathbb{R}$ som löser

$$|\boldsymbol{y} - k^*\boldsymbol{x}|^2 = \min_{k \in \mathbb{R}} |\boldsymbol{y} - k\boldsymbol{x}|^2$$

Minsta kvadratmetoden: Problemformulring

Problem: Bestäm det värde på lutningen k som gör att

$$\text{Fel} = (y_1 - kx_1)^2 + (y_2 - kx_2)^2 + (y_3 - kx_3)^2 + (y_4 - kx_4)^2 + (y_5 - kx_5)^2$$

blir så liten som möjligt.

Introducerar vektorerna

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \quad \text{och} \quad \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \in \mathbb{R}^5$$

och observera att $k\boldsymbol{x} = (kx_1, kx_2, kx_3, kx_4, kx_5)$. Problemet ovan blir:

Problem´:

Bestäm $k^* \in \mathbb{R}$ som löser

$$|\boldsymbol{y} - k^*\boldsymbol{x}|^2 = \min_{k \in \mathbb{R}} |\boldsymbol{y} - k\boldsymbol{x}|^2$$

Minsta kvadratmetoden: Problemformulring

Problem: Bestäm det värde på lutningen k som gör att

$$\text{Fel} = (y_1 - kx_1)^2 + (y_2 - kx_2)^2 + (y_3 - kx_3)^2 + (y_4 - kx_4)^2 + (y_5 - kx_5)^2$$

blir så liten som möjligt.

Introducerar vektorerna

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \quad \text{och} \quad \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \in \mathbb{R}^5$$

och observera att $k\boldsymbol{x} = (kx_1, kx_2, kx_3, kx_4, kx_5)$. Problemet ovan blir:

Problem´:

Bestäm $k^* \in \mathbb{R}$ som löser

$$|\boldsymbol{y} - k^*\boldsymbol{x}|^2 = \min_{k \in \mathbb{R}} |\boldsymbol{y} - k\boldsymbol{x}|^2$$

Allmänna problemet och dess lösning

Problem:

Givet vektorer $\boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{y}$ i $\mathbb{R}^n$. Bestäm det tal $k^* \in \mathbb{R}$ som uppfyller

$$\left|\boldsymbol{y} - k^*\boldsymbol{x}\right|^2 = \min_{k\in\mathbb{R}} \left|\boldsymbol{y} - k\boldsymbol{x}\right|^2,$$

d.v.s. det tal k^* som minimerar funktionen $k \mapsto |\boldsymbol{y} - k\boldsymbol{x}|^2$.

Kom ihåg att skalärprodukt och längd definieras för vektorer $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ och $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ i $\mathbb{R}^n$ som

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \quad \text{och}$$
$$|\boldsymbol{x}|^2 = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

Det allmänna problemet och dess lösning II

Lösningen beror på vårt “hemliga vapen”: kvadratkomplettering!

$$
\begin{aligned}
|k\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2 &= (k\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot(k\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\
&= k\mathbf{x}\cdot k\mathbf{x} - 2k\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{y}\cdot\mathbf{y} \\
&= k^2|\mathbf{x}|^2 - 2k\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + |\mathbf{y}|^2 \\
&= k^2|\mathbf{x}|^2 - 2k|\mathbf{x}|\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{|\mathbf{x}|} + |\mathbf{y}|^2 \\
&= \left(k|\mathbf{x}| - \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{|\mathbf{x}|}\right)^2 - \left(\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{|\mathbf{x}|}\right)^2 + |\mathbf{y}|^2
\end{aligned}
$$

Det allmänna problemet och dess lösning II

Lösningen beror på vårt “hemliga vapen”: kvadratkomplettering!

$$
\begin{aligned}
\left|k\mathbf{x}-\mathbf{y}\right|^2 &= (k\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot(k\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\
&= k\mathbf{x}\cdot k\mathbf{x} - 2k\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{y}\cdot\mathbf{y} \\
&= k^2\left|\mathbf{x}\right|^2 - 2k\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \left|\mathbf{y}\right|^2 \\
&= k^2\left|\mathbf{x}\right|^2 - 2k\left|\mathbf{x}\right|\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\left|\mathbf{x}\right|} + \left|\mathbf{y}\right|^2 \\
&= \left(k\left|\mathbf{x}\right| - \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\left|\mathbf{x}\right|}\right)^2 - \left(\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\left|\mathbf{x}\right|}\right)^2 + \left|\mathbf{y}\right|^2
\end{aligned}
$$

Det allmänna problemet och dess lösning II

Lösningen beror på vårt "hemliga vapen": kvadratkomplettering!

$$
\begin{aligned}
|k\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2 &= (k\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot(k\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\
&= k\mathbf{x}\cdot k\mathbf{x} - 2k\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{y}\cdot\mathbf{y} \\
&= k^2|\mathbf{x}|^2 - 2k\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + |\mathbf{y}|^2 \\
&= k^2|\mathbf{x}|^2 - 2k|\mathbf{x}|\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{|\mathbf{x}|} + |\mathbf{y}|^2 \\
&= \left(k|\mathbf{x}| - \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{|\mathbf{x}|}\right)^2 - \left(\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{|\mathbf{x}|}\right)^2 + |\mathbf{y}|^2
\end{aligned}
$$

Det allmänna problemet och dess lösning II

Lösningen beror på vårt "hemliga vapen": kvadratkomplettering!

$$
\begin{aligned}
\left|k\mathbf{x}-\mathbf{y}\right|^2 &= (k\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot(k\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\
&= k\mathbf{x}\cdot k\mathbf{x} - 2k\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{y}\cdot\mathbf{y} \\
&= k^2\left|\mathbf{x}\right|^2 - 2k\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \left|\mathbf{y}\right|^2 \\
&= k^2\left|\mathbf{x}\right|^2 - 2k\left|\mathbf{x}\right|\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\left|\mathbf{x}\right|} + \left|\mathbf{y}\right|^2 \\
&= \left(k\left|\mathbf{x}\right| - \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\left|\mathbf{x}\right|}\right)^2 - \left(\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\left|\mathbf{x}\right|}\right)^2 + \left|\mathbf{y}\right|^2
\end{aligned}
$$

Det allmänna problemet och dess lösning II

Lösningen beror på vårt "hemliga vapen": kvadratkomplettering!

$$\begin{aligned}
\left|k\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right|^2 &= (k\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\cdot(k\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\
&= k\boldsymbol{x}\cdot k\boldsymbol{x} - 2k\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y} \\
&= k^2\left|\boldsymbol{x}\right|^2 - 2k\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} + \left|\boldsymbol{y}\right|^2 \\
&= k^2\left|\boldsymbol{x}\right|^2 - 2k\left|\boldsymbol{x}\right|\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{\left|\boldsymbol{x}\right|} + \left|\boldsymbol{y}\right|^2 \\
&= \left(k\left|\boldsymbol{x}\right| - \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{\left|\boldsymbol{x}\right|}\right)^2 - \left(\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{\left|\boldsymbol{x}\right|}\right)^2 + \left|\boldsymbol{y}\right|^2
\end{aligned}$$

Det allmänna problemet och dess lösning II

Lösningen beror på vårt "hemliga vapen": kvadratkomplettering!

$$
\begin{aligned}
\left|k\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right|^2 &= (k\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\cdot(k\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\
&= k\boldsymbol{x}\cdot k\boldsymbol{x} - 2k\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y} \\
&= k^2\left|\boldsymbol{x}\right|^2 - 2k\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} + \left|\boldsymbol{y}\right|^2 \\
&= k^2\left|\boldsymbol{x}\right|^2 - 2k\left|\boldsymbol{x}\right|\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}|} + \left|\boldsymbol{y}\right|^2 \\
&= \left(k|\boldsymbol{x}| - \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}|}\right)^2 - \left(\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}|}\right)^2 + \left|\boldsymbol{y}\right|^2
\end{aligned}
$$

Det allmänna problemet och dess lösning II

Lösningen beror på vårt "hemliga vapen": kvadratkomplettering!

$$
\begin{aligned}
\left|k\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\right|^2 &= (k\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \cdot (k\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \\
&= k\boldsymbol{x} \cdot k\boldsymbol{x} - 2k\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y} \\
&= k^2\left|\boldsymbol{x}\right|^2 - 2k\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} + \left|\boldsymbol{y}\right|^2 \\
&= k^2\left|\boldsymbol{x}\right|^2 - 2k\left|\boldsymbol{x}\right|\frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}|} + \left|\boldsymbol{y}\right|^2 \\
&= \left(k|\boldsymbol{x}| - \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}|}\right)^2 - \left(\frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}|}\right)^2 + \left|\boldsymbol{y}\right|^2
\end{aligned}
$$

Det allmänna problemet och dess lösning III

Vi har alltså uttrycket:

$$\left|k\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right|^2 = \left(k|\boldsymbol{x}| - \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}|}\right)^2 - \left(\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}|}\right)^2 + \left|\boldsymbol{y}\right|^2$$

Felet blir minst möjligt om vi väljer

$$k = k^* = \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}|^2},$$

ty då blir första (icke-negativa) parentesen noll.

Tolkning: Den vektor på formen $k\boldsymbol{x}$ som ligger närmast $\boldsymbol{y}$ är:

$$\boldsymbol{y}' := k^*\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}|^2}\boldsymbol{x}$$

Vi känner igen **projektionsformeln**!

Det allmänna problemet och dess lösning III

Vi har alltså uttrycket:

$$\left|k\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\right|^2 = \left(k|\boldsymbol{x}| - \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}|}\right)^2 - \left(\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}|}\right)^2 + \left|\boldsymbol{y}\right|^2$$

Felet blir minst möjligt om vi väljer

$$k = k^* = \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}|^2},$$

ty då blir första (icke-negativa) parentesen noll.

Tolkning: Den vektor på formen $k\boldsymbol{x}$ som ligger närmast $\boldsymbol{y}$ är:

$$\boldsymbol{y}' := k^*\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}|^2}\boldsymbol{x}$$

Vi känner igen **projektionsformeln**!

Det allmänna problemet och dess lösning III

Vi har alltså uttrycket:

$$\left|k\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right|^2=\left(k|\boldsymbol{x}|-\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}|}\right)^2-\left(\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}|}\right)^2+\left|\boldsymbol{y}\right|^2$$

Felet blir minst möjligt om vi väljer

$$k=k^*=\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}|^2},$$

ty då blir första (icke-negativa) parentesen noll.

Tolkning: Den vektor på formen $k\boldsymbol{x}$ som ligger närmast $\boldsymbol{y}$ är:

$$\boldsymbol{y}':=k^*\boldsymbol{x}=\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}|^2}\boldsymbol{x}$$

Vi känner igen **projektionsformeln**!

Allmänna problemet och dess lösning IV

Resultatet ovan ger oss följande bonus:

$$0 \leq \left| k^* \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \right|^2 = \left| \boldsymbol{y} \right|^2 - \left(\frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}|} \right)^2$$

alltså

$$(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})^2 \leq \left| \boldsymbol{x} \right|^2 \left| \boldsymbol{y} \right|^2$$

Cauchy-Schwarz olikhet

För alla vektorer $\boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{y}$ i $\mathbb{R}^n$ gäller olikheten

$$\left| \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \right| \leq \left| \boldsymbol{x} \right| \left| \boldsymbol{y} \right|.$$

Allmänna problemet och dess lösning IV

Resultatet ovan ger oss följande bonus:

$$0 \leq \left|k^* \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\right|^2 = \left|\boldsymbol{y}\right|^2 - \left(\frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}|}\right)^2$$

alltså

$$(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})^2 \leq \left|\boldsymbol{x}\right|^2 \left|\boldsymbol{y}\right|^2$$

Cauchy-Schwarz olikhet

För alla vektorer $\boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{y}$ i $\mathbb{R}^n$ gäller olikheten

$$|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq \left|\boldsymbol{x}\right| \left|\boldsymbol{y}\right|.$$

Det allmänna problemet och dess lösning V

Vi har redan definierat:

$$\boldsymbol{y}' = k^* \boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}|^2} \boldsymbol{x}$$

där vi har $\boldsymbol{y}' \parallel \boldsymbol{x}$.

Sätter vi

$$\boldsymbol{y}'' = \boldsymbol{y} - k^* \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}'$$

ser man att

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}'' = \boldsymbol{x} \cdot \left(\boldsymbol{y} - \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}|^2} \boldsymbol{x} \right) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} - \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}|^2} |\boldsymbol{x}|^2 = 0,$$

så $\boldsymbol{y}'' \perp \boldsymbol{x}$.

Komposantuppdelning i $\mathbb{R}^n$: $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}' + \boldsymbol{y}''$ där $\boldsymbol{y}' \parallel \boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{y}'' \perp \boldsymbol{x}$.

Det allmänna problemet och dess lösning V

Vi har redan definierat:

$$\boldsymbol{y}' = k^*\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}|^2}\boldsymbol{x}$$

där vi har $\boldsymbol{y}' \parallel \boldsymbol{x}$.

Sätter vi

$$\boldsymbol{y}'' = \boldsymbol{y} - k^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}'$$

ser man att

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}'' = \boldsymbol{x}\cdot\left(\boldsymbol{y} - \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}|^2}\boldsymbol{x}\right) = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} - \frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}|^2}|\boldsymbol{x}|^2 = 0,$$

så $\boldsymbol{y}'' \perp \boldsymbol{x}$.

Komposantuppdelning i $\mathbb{R}^n$: $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}' + \boldsymbol{y}''$ där $\boldsymbol{y}' \parallel \boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{y}'' \perp \boldsymbol{x}$.

Det allmänna problemet och dess lösning V

Vi har redan definierat:

$$\boldsymbol{y}' = k^* \boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}|^2} \boldsymbol{x}$$

där vi har $\boldsymbol{y}' \parallel \boldsymbol{x}$.

Sätter vi

$$\boldsymbol{y}'' = \boldsymbol{y} - k^* \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}'$$

ser man att

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}'' = \boldsymbol{x} \cdot \left(\boldsymbol{y} - \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}|^2} \boldsymbol{x} \right) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} - \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}|^2} |\boldsymbol{x}|^2 = 0,$$

så $\boldsymbol{y}'' \perp \boldsymbol{x}$.

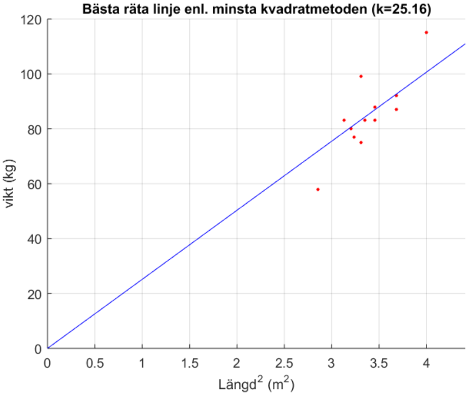
Komposantuppdelning i $\mathbb{R}^n$: $\quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}' + \boldsymbol{y}''$ där $\boldsymbol{y}' \parallel \boldsymbol{x}$ och $\boldsymbol{y}'' \perp \boldsymbol{x}$.

Resultat för populationen

Beräkning av bästa räta linjen (genom origo) ger:

$$k^* = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{x}|^2} = 25.16$$

Vilket resulterar grafen:



En känd matematikprofessor (numerisk analytiker) har sagt:

> *"BMI divides the weight by too large a number for short people and too small a number for tall people. So short people are misled into thinking that they are thinner than they are, and tall people are misled into thinking they are fatter."*
>
> *Nick Trefethen*

Tack till de personer från KCE och Matematikinstitutionen (+ 3 till) som bidragit med "real world data".

En känd matematikprofessor (numerisk analytiker) har sagt:

> *"BMI divides the weight by too large a number for short people and too small a number for tall people. So short people are misled into thinking that they are thinner than they are, and tall people are misled into thinking they are fatter."*
>
> *Nick Trefethen*

Tack till de personer från KCE och Matematikinstitutionen (+ 3 till) som bidragit med "real world data".