Datorlaboration 2

Inledning

Denna laboration handlar om serier och likformig konvergens. Hela laborationen, utom uppgift 3.9 där Maple är att föredra, bygger på Matlab. Ha din Matlabmanual lättillgänglig. Vissa filer måste du hämta på kursens hemsida.

Förbered dig genom att titta igenom denna handledning och anvisningarna nedan. *Komplettera beviset av resttermsuppskattningen* (1) *på sidan 2.* Jämför sida 182–183 i läroboken. Läs också igenom kapitlet om Fourierserier i läroboken, om du inte gjort det innan.

1 Serier (kan göras från mitten av läsvecka 4)

Vi ska utföra numerisk summation av några serier. För att förstå bättre vad som händer skall du i alla exemplen beräkna delsummorna (med `cumsum`) och titta på dem, t.ex. med kommandot `stairs`.

1.1. Serien $\sum_{k=1}^{+\infty} 1/k^4$ är konvergent och har summan $\pi^4/90$. Beräkna seriens summa med tre riktiga (korrekta) decimaler. *Tre riktiga decimaler* betyder att vi tolererar ett fel vars absolutbelopp högst är lika med tol = 0.0005. Jämförelse med integral ger resttermsuppskattningen (se exempel 5.42 i läroboken) $r_n \leq 1/(3n^3)$, så $r_n \leq \text{tol}$ om $1/(3n^3) \leq \text{tol}$, det vill säga om $n \geq (1/(3\text{tol}))^{1/3}$. Alltså gäller det att

$$n \geq \left(\frac{1}{3\text{tol}}\right)^{1/3} \implies r_n \leq \text{tol}.$$

Bestäm hur många termer som behövs för att få seriens summa med 3 decimaler (använd Matlab för räkningen). Bilda nu detta antal av seriens termer och summera. Beräkna närmevärdet på $\pi^4/90$. Detta kan göras genom att skriva så här:

```
format long;
tol = 5e-4;
n = ceil(1/(3*tol)^(1/3));
k = 1:n;
a = 1 ./ k .^ 4;
summa = sum(a)
stairs(cumsum(a))
```

Byt ut det sista kommandot mot `stairs([0,cumsum(a)])` om du vill börja summaföljden med en nolla. Kontrollera vad `ceil` (använd `help ceil`) gör för någonting.

I detta fall kan vi jämföra med Matlabs inbyggda värde.

```
fel = (pi^4)/90 - summa
```

Gör nu om alltsammans (`format long` behöver inte upprepas) med 6 och 9 decimalers noggrannhet. Hur ska värdet på `tol` ändras?

Använd tangenten ”pil uppåt” för att återkalla raden med Matlabkommandon. Det går givetvis att tillverka en skriptfil som gör räkningarna om man så föredrar.

Summa	Antal termer	Antal riktiga decimaler	fel = $\pi^4/90 - \text{summa}$
		3	
		6	
		9	

Räkningarna i exemplet ovan kan användas för att ge ett numeriskt värde på π. Det relativa felet i värdet av π beräknat med denna metod kan visas vara 1/4 av det relativa felet i seriesumman, så det är lämpligt att beräkna seriesumman med samma antal decimaler som man önskar i π.

1.2. Vi tar nu en serie som med framgång kan jämföras med en geometrisk serie. Målet är att beräkna e^6. För att åstadkomma detta ska vi approximativt summera serien

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{6^k}{k!}$$

på följande sätt. Termerna a_k i serien uppfyller rekursionsformeln

$$a_0 = 1, \qquad a_{k+1} = \frac{6}{k+1} a_k.$$

Om vi avbryter summan efter n termer, så har vi ett fel (restterm) som måste uppskattas. Vi börjar med att motivera resttermsuppskattningen

$$r_n \leq 2a_{n+1} \qquad \text{om } n \geq 10. \tag{1}$$

Ledning: Det gäller att

$$0 \leq r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + \ldots. \tag{2}$$

Vidare gäller det att $a_{n+2} \leq 2^{-1} a_{n+1}$, $a_{n+3} \leq 2^{-1} a_{n+2} \leq 2^{-2} a_{n+1}$ och så vidare. Vilken uppskattning får du för a_{n+k} i termer av a_{n+1}? Använd den och (2) för att erhålla (1). Skriv ned ditt resonemang på raderna nedan!

Beräkna nu iterativt termer och delsummor tills resttermen blir så liten som önskat. Man kan göra så här:

- Gå till `File`, `New`, `M-file`
- Skriv in filen

```
function [s,antaltermer]=expsum(tol)
% s anger närmevärdet av e^6
% tol = toleransen
a = 1;
s = 0;
k = 0;
while ((2*a> tol) | (k<11))
   s = s + a;
   a = a*6/(k+1);
   k = k+1;
end;
antaltermer = k;
```

- Spara filen under namnet `expsum`.

Du har nu skapat Matlab-funktionen `expsum`. Genom att i Matlab skriva

```
[s,antaltermer] = expsum(5e-4)
```

så får du ett närmevärde till e^6 med tre riktiga decimaler. Jämför värdet med Matlabs `exp(6)`. Kör om beräkningen igen för att få 6 decimalers noggrannhet och jämför än en gång med Matlabs `exp(6)` .

Summa	Antal termer	Antal riktiga decimaler	`fel` = `s` − `exp(6)`
		3	
		6	
		9	

Avsluta med `format` så återgår Matlab till att visa normalt antal siffror.

1.3 (Frivillig)**.** Ändra koden ovan så att den i stället beräknar e^x, för godtyckligt $x \geq 0$.

2 Likformig konvergens (kan göras efter läsvecka 4)

Det begrepp i kursen som brukar vara det allra svåraste att smälta är *likformig konvergens*. Med hjälp av några interaktiva illustrationer får du förhoppningsvis en bättre bild av vad det betyder. Öppna en webbläsare och gå till kursbokens webbsida: `http://funktionsteori.se`. Klicka på ”Utforska” och välj sedan ”Likformig konvergens” i menyn.

Funktionsföljden $f_n(x) = x^n$

Det första exemplet visar funktionsföljden $f_n(x) = x^n$, vilket är ett av de allra viktigaste exemplen. Satsa tillräckligt mycket tid på att förstå hur denna funktionsföljd uppför sig!

Genom att ändra i reglaget som ligger högst uppe i grafen, så kan du välja ett värde på n (mellan 1 och 100).

2.1. Vad händer med grafen när du ökar n?

Svar: ____________________

Gränsfunktionen då $n \to +\infty$ är

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Stämmer det med vad du ser?

Svar: ____________________

2.2. Sätt $n = 1$ igen. Fixera ett värde på $x = r$. Du kan ändra värdet genom att flytta den gröna punkten på x-axeln i sidled. Välj till exempel $r = 0.5$. Vad händer med $f_n(r)$ då du ökar n? Upprepa för $r = 0.75$, $r = 0.95$, $r = 0.99$ och $r = 1$. Beskriv skillnaden mellan vad som händer för de olika valen av r.

Svar: ____________________

2.3. Du ser grafen för gränsfunktionen f utritad i rött. Fyll i nedanstående:

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |f - f_{10}| = \underline{\qquad\qquad} \qquad \sup_{0 \leq x \leq 1} |f - f_{100}| = \underline{\qquad\qquad}$$

$$\sup_{0 \leq x \leq 0.9} |f - f_{10}| = \underline{\qquad\qquad} \qquad \sup_{0 \leq x \leq 0.9} |f - f_{100}| = \underline{\qquad\qquad}$$

Konvergerar f_n mot f likfomigt på $[0, 1]$? Konvergerar f_n mot f likformigt på $[0, 0.9]$?

Svar: ____

2.4. Titta igenom de andra exemplen (se menyn uppe till höger) på webbsidan, åtminstone kortfattat.

3 Fourierserier i Matlab (kan göras under lv 5 parallellt med övningar)

Även om du inte har hunnit räkna så mycket för hand i kapitlet om Fourierserier, så kommer du att ha glädje av dessa övningar!

Vi ska göra ett experimentellt studium av trigonometriska Fourierserier, dvs. funktionsserier av formen

$$c_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt),$$

där $a = (a_k)$ och $b = (b_k)$ är reella talföljder. En term i en sådan serie kan också skrivas som

$$u_k(t) = a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) = A_k \cos(kt + \delta_k)$$

och är en harmonisk svängning med vinkelfrekvens k och period $2\pi/k$. Amplituden ges av formeln

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

och fasförskjutningen δ_k uppfyller att $\tan \delta_k = b_k/a_k$. Vi skall alltså addera sinusformade funktioner med högre och högre frekvenser, och börjar med att hämta de filer vi behöver och med att göra några förberedande inställningar i Matlab.

3.1. Hämta filerna `fourkoeff.m`, `visafunk.m`, `visaserie.m` och `visadelsummor.m` från kurshemsidan (använd höger musknapp och välj ”Spara som”). Definiera två följder genom

```
K = 1:100;
t = -10:0.05:10;
```

Variabeln `K` svarar mot index k ovan, och `t` är tidsvariabeln. Ändra inte dessa variabler i fortsättningen. Koefficienterna c_0, a_k och b_k lagras i den skalära variabeln `cnoll` och i vektorerna `akoeff` och `bkoeff`.

3.2. Vi ska nu beräkna delsummor till funktionsserien

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kt}{k} = \sin t + \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} + \dots .$$

Mata in

```
cnoll = 0;
akoeff = zeros(size(K));
bkoeff = 1 ./ K;
```

vilket motsvarar att $c_0 = 0$, $a_k = 0$ och $b_k = 1/k$ för $1 \leq k \leq 100$. Plotta successivt

```
s0 = cnoll*ones(size(t)); plot(t, s0)
s1 = s0 + bkoeff(1)*sin(t); plot(t, s1)
s2 = s1 + bkoeff(2)*sin(2*t); plot(t, s2)
s3 = s2 + bkoeff(3)*sin(3*t); plot(t, s3)
```

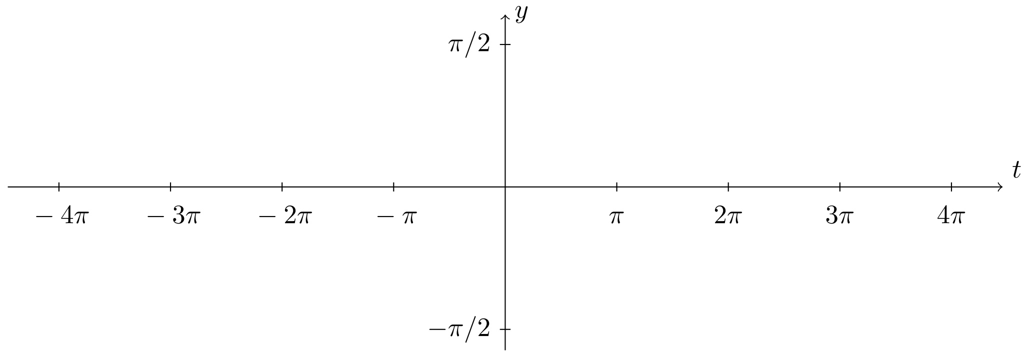
och så vidare, tills du tydligt ser en tendens.

3.3. För att slippa skriva så mycket kan du ta hjälp av filen `visaserie.m` från kurshemsidan. Använd den inbyggda hjälpen: skriv `help visaserie` för att se hur funktionen fungerar. Skriv sedan in

```
visaserie(cnoll, akoeff, bkoeff, -2, 2)
```

Med normal upplösning på skärmen är det inte lönt att ta med fler än ca 50 termer. Bryt sedan med `Ctrl-C`.

Verkar Fourierserien konvergera? Rita in vad du tror är seriesumman då $-4\pi < t < 4\pi$. Lägg märke till att alla sinustermer, och därmed även delsummorna, är *udda* funktioner.



Konvergerar den trigonometriska Fourierserien likformigt t. ex. då $-2\pi < t < 2\pi$?

Svar: ______________________________

3.4. Mata nu in koefficienter

$$c_0 = \frac{1}{\pi}, \quad a_k = \frac{2}{\pi}\frac{\cos(k\pi/2)}{1-k^2},\ k \neq 1, \quad a_1 = \frac{1}{2}, \quad b_k = 0$$

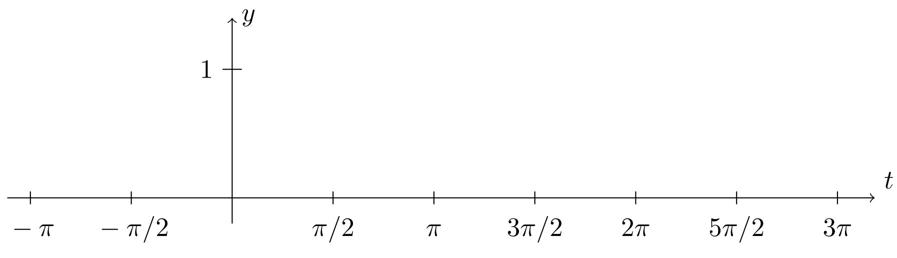
genom

```
cnoll = 1/pi;
akoeff = 2/pi*cos(K*pi/2) ./ (1 - K.^2); % akoeff(1) odefinierad!
akoeff(1) = 1/2;
bkoeff = zeros(size(akoeff));
```

och rita upp delsummorna

```
visaserie(cnoll, akoeff, bkoeff, -0.5, 1.5);
```

Hur ser resultatet ut? Rita en skiss av summan:



Verkar denna serie konvergera likformigt (på intervallet $-\pi < t < 3\pi$)?

Svar: ______________________________

3.5. Då $0 \le t \le \pi$ gäller att

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos(2k+1)t}{(2k+1)^2} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - t\right). \tag{3}$$

I mån av tid kan du visa detta med ”handräkning” genom att bestämma cosinusserien för högerledet i (1). Med hjälp av Matlab går det emellertid att snabbt göra det troligt att (3) gäller.

Innan du använder `visaserie` behöver du skriva in `cnoll, akoeff` och `bkoeff`. Du kan använda att

```
akoeff = 1/2 * (1 - (-1).^K) ./ K.^2:
```

Glöm inte att ändra `cnoll` och `bkoeff`! Kör sedan `visaserie` (till exempel med `ymin=-1.5;` och `ymax=1.5;`). Sedan du använt `visaserie` för att rita vänsterledet kan du i samma fönster genom kommandona

```
subplot(211)
hold on
plot(t, pi/4*(pi/2 - t), 'r')
```

rita även högerledet med röd färg. För vilka t verkar likheten stämma?

Svar: ____________________

3.6. Om seriens summafunktion är känd från början, så kan man även beräkna och rita upp dess resttermer. Detta går att göra med skriptet `visadelsummor.m`.

I uppgift 3.4 är summafunktionen en halvvågslikriktad cosinusvåg. Skriv ånyo in `anoll, akoeff` och `bkoeff` (se sidan 5 i denna handledning). Skriv också in

```
F = 'max(cos(tid),0)'
```

och kör `visadelsummor` med

```
visadelsummor(cnoll, akoeff, bkoeff, F)
```

I mitten visas den senast tillagda termen u_n i rött och resttermen r_n i blått . Överst visas delsumman i blått och nederst seriens summa i grönt (om man angivit den rätt i `funktion`). Förstora gärna figurfönstret lite (genom att dra med musen i nedre högra hörnet). Tryck på valfri tangent (= mellanslag) för att få nästa delsumma. Bryt med `Ctrl-C`.

Med hjälp av `visadelsummor` kan man kontrollera alla svar i övningarna på Fourierkoefficienter. Om man inte tycker om att partialintegrera, så kan man låta Matlab räkna ut koefficienterna. Detta sker med den numeriska metoden *snabb Fouriertransformation* (FFT). Inte helt överraskande finns det ett Matlabkommando som heter `fft`. Med hjälp av `m`-filen `fourkoeff` kan man använda detta för att beräkna Fourierkoefficienterna för en given funktion. Titta på `fourkoeff.m`, och lägg märke till att index är förskjutna ett steg, eftersom Matlab indicerar vektorer med början på $k = 1$. Vi låter `fourkoeff` beräkna $2^8 = 256$ koefficienter numeriskt (vilket svarar mot 128 termer i den trigonometriska Fourierserien).

3.7. Vi skall nu se på utvecklingen av en fyrkantsvåg. Den kan definieras genom

```
F = '(tid < pi) - (tid > pi)'
```

Detta kanske kräver en förklaring. Om `tid` är en vektor, så blir `(tid < pi)` en vektor med samma antal element som `tid`. Den har ettor i de element där villkoret `tid < pi` är sant i `tid` och nollor för övrigt. Rita upp fyrkantsvågens partialsummor med hjälp av kommandona `fourkoeff`, `visadelsummor`

```
[cnoll, akoeff, bkoeff] = fourkoeff(F);
visadelsummor(cnoll, akoeff, bkoeff, F)
```

3.8. Undersök på samma sätt triangelvågen, som kan beskrivas som

```
funktion = 'tid.*(tid < pi) + (2*pi-tid).*(tid >= pi)'
```

Ser det ut som att triangelvågens Fourierserie konvergerar likformigt?

Svar: ______________________________

3.9 (Frivillig)**.** För denna uppgift passar nog Maple bättre än Matlab. Om en funktion f är reell, kontinuerlig och $\int_a^b f(x)^2\,dx = 0$ så är $f(x) = 0$ för varje x i intervallet $[a, b]$. Likaså gäller att om f och g är reella, kontinuerliga och $\int_a^b \bigl(f(x) - g(x)\bigr)^2\,dx = 0$ så är $f(x) = g(x)$ för varje x i intervallet $[a, b]$.

Vi kan däremot inte hoppas på att integralen

$$\int_0^{2\pi} \Bigl(f(x) - \bigl(\frac{a_0}{2} + a_1\cos x + a_2\cos 2x + b_1\sin x + b_2\sin 2x\bigr)\Bigr)^2\,dx \tag{4}$$

blir 0 hur vi än väljer de reella talen a_0, a_1, a_2, b_1 och b_2. Frågan är: hur skall koefficienterna $a_0, a_1, \ldots, b_3$ väljas för att integralen (4) ska bli så liten som möjligt?

Uttrycket (4) kan uppfattas som en funktion av variablerna $a_0, a_1, \ldots, b_2$. Från den flerdimensionella analysen vet du att en minimipunkt är en stationär punkt. Maple kan nu hjälpa dig bestämma koefficienterna $a_0, a_1, \ldots, b_2$. Känner du igen talen?

Svar: ______________________________