Innehåll

1

Reella tal

1.1 Introduktion

För att kunna göra analys för funktioner av en reell variabel behöver vi känna till några grundläggande egenskaper hos de reella talen. Vi skall i detta kapitel lista de axiom — påståenden som antas sanna utan bevis — som karakteriserar de reella talen, och som vi sedan kommer att använda oss av i resten av texten. För att kunna göra denna diskussion på ett rimligt sätt behöver vi låna några enkla begrepp från mängdläran, vilket vi alltså börjar med.

1.2 En gnutta mängdlära

Vi börjar med att införa några begrepp och symboler från *mängdläran*, som vi kommer att använda här och var i boken. Låt oss först tala om vad en *mängd* är.

Vanligen tänker vi på en mängd som en samling av objekt, som kallas för element. Med andra ord utgörs en mängd av sina element. Om vi av någon anledning vill arbeta med de naturliga talen 1, 2 och 3, kan vi tala om mängden A som består av just dessa tal. Vi skriver då

$$A = \{1, 2, 3\}.$$

Ofta kommer vi att ha anledning att tala om den mängd som består av alla naturliga tal, och vi betecknar den med $\mathbb{N}$. Sålunda har vi

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}.$$

En mängd behöver inte bestå av tal, utan kan bestå av element av nästan vilken natur som helst. Sålunda kan vi till exempel tala om mängden av alla matematikstudenter i Lund. I den högre mängdläran inför man vissa regler, de så kallade Zermelo[1]–Fraenkels[2] axiom, för vilka mängder som vi får lov att bilda. Vi kommer inte att gå in närmare på detta.

Om A är en mängd, och a är ett element i A, skriver vi $a \in A$. Om a inte är ett element i A skriver vi $a \notin A$. Mängden som inte innehåller några element kallas för den tomma mängden och betecknas med $\emptyset$.

Antag att A och B är två mängder som har egenskapen att om $a \in A$ så är också $a \in B$. Vi säger då att B är en *delmängd* till A och skriver $B \subset A$ eller $A \supset B$.

Om A är en mängd, och vi är intresserade av de element i A som har en viss egenskap, till exempel de element i A som är fina, så kan vi låta B vara mängden av dessa element, och vi skriver då

$$B = \{\, a \in A : a \text{ är fin} \,\}\,.$$

Tydligen är då $B \subset A$. Mängden av de jämna naturliga talen, kan på detta sätt skrivas som

$$\{\, a \in \mathbb{N} : a \text{ är ett jämnt tal} \,\}\,.$$

Observera att om $A \subset B$ och $B \subset A$, så innehåller A och B precis samma element. Vi säger då att A och B är *lika* och skriver $A = B$.

Av två mängder A och B, kan vi bilda två nya mängder. *Unionen* av A och B är den mängd som består av alla element som tillhör antingen A eller B, och betecknas med $A \cup B$. *Snittet* av A och B är den mängd av element som tillhör både A och B, och betecknas $A \cap B$. Vi har till exempel att

$$\{1,2,3\} \cup \{3,4,5\} = \{1,2,3,4,5\}\,, \qquad \{1,2,3\} \cap \{3,4,5\} = \{3\}\,.$$

Vi har också anledning att definiera den kartesiska[3] produkten $A \times B$ av två mängder A och B. Den kartesiska produkten av A och B består av alla element (a,b) där $a \in A$ och $B \in B$. Exempelvis är $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mängden av alla par av naturliga tal, såsom $(1,1)$, $(2,3)$ och $(101,23)$.

Ett mycket viktigt och central begrepp i matematiken är begreppet *funktion*. Om A och B är två mängder så tänker vi ofta på en funktion från A till B som en regel som till varje element i A tilldelar ett entydigt bestämt element i B. Om f är en funktion från A till B, så skriver vi $f\colon A \to B$. Det element i B som funktionen f tilldelar ett element $a \in A$ betecknas $f(a)$. Mängden A kallas för fs *definitionsmängd* och mängden B kallas för fs *målmängd* eller *värdeförråd*.

Låt oss som exempel betrakta den funktion från de naturliga talen till de naturliga talen, som till varje naturligt tal a tilldelar det naturliga talet a^2. Vi skulle kunna kalla funktionen för kvadreringsfunktionen. Ett annat

---

1 Ernst Zermelo, 1871–1953, tysk matematiker

2 Abraham Fraenkel, 1891–1965, tysk-israelisk matematiker

3 René Descartes, 1596–1650, fransk filosof och matematiker

sätt att beskriva vad kvarderingsfunktionen gör är att skriva $a \mapsto a^2$. Om vi väljer att kalla funktionen för K kan vi då skriva $K\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ och $K\colon a \mapsto a^2$. Lägg märke till betydelseskillnaden mellan $\to$ och $\mapsto$.

Låt oss som kuriosa nämna att i den högre mängdläran ges begreppet funktion en lite mer precis definition. En funktion $f\colon A \to B$ definieras då som en delmängd till $A \times B$ som har egenskapen att det för varje $a \in A$ existerar precis ett element $b \in B$ sådant att $(a, b) \in f$. Elementet b är då det element som vi kallar för $f(a)$.

Om $f\colon A \to B$ är en funktion och $C \subset A$, $D \subset B$, så talar man ibland om mängderna $f(C)$ och $f^{-1}(D)$. Dessa definieras av

$$
\begin{aligned}
f(C) &= \{\, b \in B : b = f(a) \text{ för något } a \in C \,\}, \quad \text{och} \\
f^{-1}(D) &= \{\, a \in A : f(a) \in D \,\}.
\end{aligned}
$$

Med vår kvadreringsfunktion K som vi definierade ovan, har vi alltså att

$$K(\{1,2,3,4\}) = \{1,4,9,16\} \quad \text{och} \quad K^{-1}(\{1,2,3,4\}) = \{1,2\}.$$

I den matematiska analysen arbetar vi ofta med mängden av de reella talen, som vi betecknar med $\mathbb{R}$. Om $A \subset \mathbb{R}$ så är det ibland praktiskt att tala om mängden av de reella tal som inte ligger i A. Denna mängd kallas för *komplementet* till A och betecknas $\complement A$. Vi har alltså att

$$\complement A = \{\, a \in \mathbb{R} : a \notin A \,\}.$$

Vad som är komplementet till A beror på vad vi betraktar A som en delmängd till. Om vi istället betraktar A som en delmängd till de komplexa talen $\mathbb{C}$, så blir $\complement A = \{\, a \in \mathbb{C} : a \notin A \,\}$, vilket är en större mängd än det föregående komplementet. Ofta är det av sammanhanget klart vad A är en delmängd av. Om så inte är fallet måste vi vara tydliga med vad vi menar när vi talar om komplementet till A.

1.3 Axiom för reella tal

Vi postulerar de reella talen $\mathbb{R}$ som en mängd till vilken vi kopplar två operationer — addition och multiplikation, bägge från $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$ — så att de sju Axiomen 1.1–1.5, 1.6 och 1.10 nedan är uppfyllda. Vi kommer förstås att skriva $a + b$ för summan av de reella talen a och b, termerna, och $a \cdot b$ för produkten av de reella talen a och b, faktorerna.

De första fem axiomen handlar om hur vi räknar med addition och multiplikation, det sjätte handlar om att mängden av reella tal är ordnade, och således kan jämföras med varandra. Det sjunde och sista axiomet, supremumaxiomet, säger att de reella talen är fullständiga, dvs att det inte finns några luckor i den reella tallinjen.

Vi skall här varken att argumentera för existens eller entydighet av den mängd $\mathbb{R}$ som beskrivs med axiomen. Det är dock på sin plats att redan nu nämna att det är fullt möjligt att *konstruera* mängden $\mathbb{R}$ så att den får de önskade egenskaperna. Ett vanligt sätt att göra detta, är att med hjälp av grundläggande mängdlära först definiera de naturliga talen, och sedan utvidga stegvis, först till heltalen, sedan till de rationella talen, och slutligen till de reella talen. Vi skissar hur den processen fungerar i mer detalj i avsnitt 2.8. Den som ändå vill läsa en mer fullständig genomgång av grunderna om de reella talen kan med fördel göra det i [1][4].

Kroppsaxiomen — Algebraiska egenskaper

De fem första axiomen, som tillsammans säger att $\mathbb{R}$ utgör en (tal)kropp, berättar kort och gott hur vi räknar med de reella talen.

Axiom 1.1. (Kommutativitet) För alla $a, b \in \mathbb{R}$ gäller det att

$$a + b = b + a \quad \text{och} \quad a \cdot b = b \cdot a.$$

Axiom 1.2. (Associativitet) För alla $a, b, c \in \mathbb{R}$ gäller att

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad \text{och} \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Axiom 1.3. (Distributivitet) För alla $a, b, c \in \mathbb{R}$ gäller att

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c).$$

Axiom 1.4. (Existens av neutrala element) Det existerar reella tal 0 och 1, $0 \neq 1$, sådana att $a + 0 = a$ och $a \cdot 1 = a$ för varje $a \in \mathbb{R}$.

Axiom 1.5. (Existens av inverser) För varje $a \in \mathbb{R}$ existerar ett reellt tal, som vi skriver $-a$, så att $a + (-a) = 0$, och för varje $a \neq 0$ existerar ett reellt tal, som vi skriver a^{-1}, sådant att $a \cdot a^{-1} = 1$.

De räkneregler som handlar om addition och multiplikation av reella tal kan alltså erhållas utifrån ovanstående fem axiom. Vi skriver oftast ab för $a \cdot b$. Vidare undviker vi att skriva ut parenteser om de inte behövs. Axiomet om distributivitet ovan skrivs vanligen $a(b + c) = ab + ac$, och då är det underförstått att högerledet står för $(a \cdot b) + (a \cdot c)$ och inte till exempel $a \cdot (b + a) \cdot c$.

Vi skriver hellre $b - a$ än $b + (-a)$, och minustecknet i $b - a$ kan ses som en definition av subtraktion av två reella tal. Vid subtraktion bör man vara lite observant vid utsättandet av parenteser. Skall uttrycket $a - b - c$ tolkas som $a - (b - c)$ eller $(a - b) - c$? Enligt konvention är det $(a - b) - c$ som avses. Använd parenteser om du är osäker.

[4] Vi kommer att ge referenser till annan litteratur på detta sätt. På sidan 75 kan du hitta mer detaljer om referenserna.

Divisionen a/b definieras som ab^{-1}, och det följer att $1/b = b^{-1}$. Vi undviker dock att skriva $a/b/c$, eftersom det skulle kunna tolkas som antingen $a/(bc)$ eller $(ac)/b$.

För varje $a \in \mathbb{R}$ gäller det att $a \cdot 0 = 0$. Det följer att om produkten av två reella tal är 0 så måste minst ett av dem vara noll. Om nämligen $ab = 0$ och $a \neq 0$ så kan vi multiplicera med a^{-1} för att finna att $b = 0$. Det följer också att det är otillåtet (dvs inte definierat) att dela ett rellt tal med talet 0.

Med enkla argument (se problemen) visas de vanliga räknereglerna för reella tal. Från dessa kan till exempel förkortningsregeln

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}, \quad (b, c \neq 0)$$

och reglerna för att ställa bråk under gemensamt bråkstreck visas,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \text{och} \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}. \tag{1.1}$$

Ordningsaxiomet — jämförelse av reella tal

Det sjätte axiomet, ordningsaxiomet, berättar för oss att det är möjligt att jämföra reella tal.

Axiom 1.6. (Ordningsaxiomet) Det existerar en delmängd $\mathbb{R}_+$ av $\mathbb{R}$ sådan att

a) om $a, b \in \mathbb{R}_+$ så gäller det att $a + b \in \mathbb{R}_+$ och $ab \in \mathbb{R}_+$.
b) för varje $a \in \mathbb{R}$ gäller endast ett av följande påståenden: $a \in \mathbb{R}_+$, $a = 0$, $-a \in \mathbb{R}_+$.

De reella tal a som tillhör $\mathbb{R}_+$ kallar vi för *positiva* och de a för vilka $-a \in \mathbb{R}_+$ kallar vi för *negativa*. Talet 0 är varken positivt eller negativt. Från axiomet ovan kan vi dra alla slutsatser som man brukar göra för att arbeta med olikheter, och för att göra det inför vi relationerna $>$ och $<$.

För $a, b \in \mathbb{R}$ menar vi med vilket som helst av $a > b$ och $b < a$ att $a - b \in \mathbb{R}_+$. Vidare utläser vi $a > b$ som "a är större än b" och $b < a$ som "b är mindre än a". Om vi i stället skriver $a \geq b$ eller $b \leq a$ så menar vi att det antingen gäller att $a > b$ eller att $a = b$, och säger då att "a är större än, eller lika med b" alternativt "b är mindre än, eller lika med a".

Det är klart att a är positiv ($a \in \mathbb{R}_+$) precis då $a > 0$ och att a är negativ precis då $a < 0$. Vi går inte in närmare på de räkneregler som gäller för olikheter, utan hänsvisar till övningarna.

Några delmängder av de reella talen

Några vanligt förekommande delmängder av $\mathbb{R}$ är

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

som vi beskriver i all korthet nedan.

Genom att definiera $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $4 = 3 + 1$ och så vidare erhålls mängden av de *naturliga talen*[5],

$$\mathbb{N} = \left\{ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \dots \right\}.$$

Eftersom $1 > 0$ gäller det att $1 < 2 < 3 < 4 < \cdots$, och de naturliga talen är ordnade som vi förväntar oss. Varken differensen eller kvoten av naturliga tal behöver bli ett nytt naturligt tal. Den första defekten kan vi råda bot på genom att införa *heltalen*,

$$\mathbb{Z} = \left\{ 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \dots \right\}.$$

Addition och multiplikation av heltal ger nya heltal. Kvoten av två heltal kan dock inte alltid definieras som ett heltal, varför det lämpar sig att även utvidga denna mängd, och denna gång erhålls de *rationella talen*,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \ :\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}.$$

Denna mängd är sluten under addition och multiplikation (som sker enligt (1.1)), dvs summor och produkter av rationella tal ger nya rationella tal. I själva verket är axiom 1.1–1.5 såväl som axiom 1.6 uppfyllda, och vi säger att $\mathbb{Q}$ utgör en ordnad kropp, precis som $\mathbb{R}$.

Reella tal som inte är rationella kallas *irrationella*. Ett par exempel ges av $\sqrt{2}$ och π, där det är relativt enkelt att visa att den förstnämnde är irrationel (övning 1.12), medan man behöver arbeta lite mer för att visa att π inte är rationellt, se sats ??.

Eftersom både $\mathbb{Q}$ och $\mathbb{R}$ är ordnade talkroppar behöver vi någon annan egenskap, som gör det lämpligt att göra analys på funktioner på $\mathbb{R}$ och inte på $\mathbb{Q}$. Det skall vi återkomma till i nästa avsnitt, men först definierar vi ytterligare några delmängder av de reella talen, nämligen intervall.

Givet reella tal a och b, $a < b$, talar vi om intervall med a och b som ändpunkter. Närmare bestämt inför vi det *öppna intervallet*[6] (a, b), det *slutna intervallet* $[a, b]$ samt de *halvöppna* (eller om man vill, *halvslutna*) *intervallen* $(a, b]$ och $[a, b)$, där

$$\begin{aligned} (a,b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \quad & [a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}, \\ (a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}, \quad & [a,b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}, \end{aligned}$$

Slutna och begränsade intervall kallar vi för *kompakta*, och de kommer vi att återkomma till i avsnitt 2.5 då vi visar intervallinkapslingssatsen, men

[5] Observera att vi har valt att inte ha med talet 0 i mängden $\mathbb{N}$ av naturliga tal.

[6] Ett annat skrivsätt för det öppna intervallet (a, b) är $]a, b[$. Med denna konvention skrivs de halvöppna intervallen $(a, b]$ som $]a, b]$ och $[a, b)$ som $[a, b[$.

framförallt i avsnitt 2.10 som handlar om just kompakta delmängder av $\mathbb{R}$, och i avsnitt ?? som handlar om kontinuerliga funktioner på kompakta intervall.

Supremumaxiomet — fullständigeten hos reella tal

Vi är nu redo att diskutera det sista axiomet, supremumaxiomet, för de reella talen Det är den avgörande egenskap som $\mathbb{R}$ men inte $\mathbb{Q}$ besitter, och som gör det fördelaktigt att arbeta med $\mathbb{R}$.

Antag att $A \subset \mathbb{R}$. Vi säger att $b \in \mathbb{R}$ är en *övre begränsning* till A om det gäller att $a \leq b$ för varje $a \in A$. Om A har en övre begränsning säger vi att A är *uppåt begränsad* alternativt *begränsad ovanifrån*. Helt analogt definieras begreppen *undre begränsning*, *nedåt begränsad* och *begränsad underifrån*. En mängd som är både uppåt och nedåt begränsad sägs vara *begränsad*.

Exempel 1.7. Låt $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Varje intervall med ändpunkter a och b är både uppåt och nedåt begränsade.

Mängden $\{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ är uppåt men inte nedåt begränsad. ∎

Definition 1.8. (Supremum och infimum) Vi kallar det reella talet s för *supremum* av A eller den *minsta övre begränsningen* till mängden A precis då

a) s är en övre begränsning till A, och

b) om t är en annan övre begränsning till A, så är $s \leq t$.

Vi betecknar den minsta övre begränsningen för A, om den existerar, med $\sup A$. På motsvarande sätt definieras *infimimum* av A, eller den *största under begränsningen* av en mängd A. Den betecknas i förekommande fall $\inf A$.

Det följer direkt att en mängd som mest kan ha en övre begränsning, ty om den hade två skulle de vara mindre än eller lika med varandra, och alltså lika.

Vissa delmängder av $\mathbb{R}$ saknar minsta övre begränsning. Till exempel så gäller detta för $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ och $\mathbb{R}$. En ändlig mängd har dock alltid en minsta övre begränsning, nämligen det största elementet i mängden. Det kan även hända att den minsta övre begränsningen existerar, men att den inte tillhör A.

Exempel 1.9. Låt $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Varje intervall med ändpunkter a och b har infimum a och supremum b, oavsett om ändpunkterna tillhör intervallet eller ej.

Mängden $\{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ har supremum 0, men saknar infimum. ∎

Axiom 1.10. (Supremumaxiomet) Varje icketom mängd av reella tal som är begränsad ovanifrån har en minsta övre begränsning.

Som en första tillämpning av supremumaxiomet visar vi den så kallade arkimediska[7] egenskapen, som säger att det finns godtyckligt stora heltal.

Sats 1.11. (Arkimediska egenskapen) *Antag att $a \in \mathbb{R}$. Då existerar $n \in \mathbb{Z}$ så att $n > a$.*

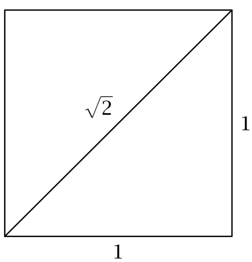
Bevis Vi antar, för att få en motsägelse, att det för det reella talet a inte finns några heltal n större än a. Det betyder att $n \leq a$ för alla heltal, och att $\mathbb{Z}$ är begränsad ovanifrån. Eftersom det finns heltal (till exempel är 0 ett heltal) så är $\mathbb{Z}$ inte tom. Enligt supremumaxiomet existerar därmed det reella talet $b = \sup \mathbb{Z}$.

Men för varje heltal n gäller det att $n + 1$ också är ett heltal, varför $n + 1 \leq b$, dvs $n \leq b - 1$, vilket alltså innebär att även $b - 1$ är en övre begränsning för $\mathbb{Z}$. Eftersom $b - 1 < b$ motsäger detta att b är den minsta över begränsningen. Vårt antagande måste därmed vara fel, och vi drar slutsatsen att det finns heltal större än a. ∎

Den arkimediska egenskapen känns förmodligen fullständigt självklar. En inte fullt så uppenbar följd av den är att det till varje reellt tal finns rationella tal som är godtyckligt nära det reella talet. Vi formulerar det som en sats, men lämnar beviset till dig, se övning 1.16.

Sats 1.12. ($\mathbb{Q}$ ligger tätt i $\mathbb{R}$) *Givet $a \in \mathbb{R}$ och $\varepsilon > 0$ existerar (minst) ett $r \in \mathbb{Q}$ så att $|a - r| < \varepsilon$.*

Som ännu en tillämpning av supremumaxiomet visar vi att varje positivt reellt tal kan skrivas som kvadraten av ett positivt reellt tal. Det kan tyckas märkligt att vi ska behöva visa något sådant. Detta är dock ett exempel där skillnaden mellan de reella och rationella talen framkommer tydligt. Till exempel har ekvationen $x^2 = 2$ två reella lösningar, men ingen av dem tillhör $\mathbb{Q}$. Pythagoras sats medför alltså att diagonalen i en kvadrat med sidlängd 1 är alltså inte ett rationellt tal (figur 1.1).



Figur 1.1

Sats 1.13. *Antag att $y > 0$. Då existerar ett tal $x > 0$ så att $x^2 = y$.*

[7] Arkimedes av Syrakusa, (−287)–(−212), grekisk matematiker, uppfinnare och astronom

Bevis Om $0 < a < b$ är ju $a^2 < b^2$, så det kan finnas högst en positiv kvadratrot. Låt nu $y > 0$ vara givet. Vi skall se att det existerar $x > 0$ så att $x^2 = y$. För ändamålet definierar vi mängden

$$A = \{ a \in \mathbb{R} \, : \, a \geq 0, \; a^2 \leq y \}.$$

Mängden A är inte tom eftersom $0 \in A$. Vi visar att A är begränsad ovanifrån. Låt b vara större än y och 1. Då blir $b^2 = b \cdot b > b \cdot 1 = b > y$. Alltså är $a \leq b$ för varje $a \in A$, och A är begränsad ovanifrån. Därmed existerar $x = \sup A$. Vi är klara om vi visar att $x^2 = y$.

Vi börjar med att observera att $x > 0$. Låt nämligen a vara det minsta av 1 och y. Då är $a > 0$ och $a^2 \leq 1 \cdot a \leq y$, varför $a \in A$. Alltså är $x \geq a > 0$.

Vidare, om ε väljs så att $0 < \varepsilon < x$, så gäller det att $0 < x - \varepsilon < x < x + \varepsilon$, eller, efter kvadrering, $(x-\varepsilon)^2 < x^2 < (x+\varepsilon)^2$. Enligt definitionen av x finns det tal större än $x - \varepsilon$ i A, medan $x + \varepsilon \notin A$. Alltså gäller det att $(x-\varepsilon)^2 < y < (x+\varepsilon)^2$. Kopplar vi ihop dessa två instängningar finner vi att

$$(x-\varepsilon)^2 - (x+\varepsilon)^2 < x^2 - y < (x+\varepsilon)^2 - (x-\varepsilon)^2$$

det vill säga

$$|x^2 - y| < (x+\varepsilon)^2 - (x-\varepsilon)^2 = 4x\varepsilon.$$

Eftersom olikheten gäller för varje $\varepsilon > 0$ så gäller det enligt övning 1.5 att $|x^2 - y| \leq 0$. Men eftersom $|x^2 - y| \geq 0$ per definition, så är enda möjligheten att $|x^2 - y| = 0$, dvs $x^2 = y$. ∎

Vi gör följande definition av kvadratroten ur ett positivt tal.

Definition 1.14. Givet $y > 0$ kallar vi den positiva lösningen x till ekvationen $x^2 = y$ för *kvadratroten* av y, och skriver $x = \sqrt{y}$. Vi låter även $\sqrt{0} = 0$.

Det gäller att $\sqrt{9} = 3$ eftersom $3^2 = 9$ och $3 > 0$. Lösningen till ekvationen $x^2 = 9$ kan dock skrivas $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$.

På liknande sätt, men med lite mer arbete, kan man verifiera att n:te roten av ett positivt tal y existerar, dvs det finns ett positivt tal x så att $x^n = y$. Detta tal betecknar vi med $\sqrt[n]{y}$. Till exempel är $\sqrt[3]{8} = 2$ eftersom $2^3 = 8$. Man kan visa att de vanliga potenslagarna fortfarande gäller då heltalen m och n ersätts med rationella tal. Vi gör dock inte det, eftersom vi senare (se definition ??) kommer att använda exponentialfunktionen och logaritmfunktionen för att ge en allmän definition av potenser a^b, där $a > 0$ och $b \in \mathbb{R}$, och då följer potenslagarna ganska snart från deras räkneregler (se övning ??).

1.4 Reella tal och decimalutvecklingar

I skolan lär vi oss att reella tal är tal som har decimalutveckling, ändlig eller oändlig. Vi skall nu diskutera detta lite närmre, och nöjer oss med att göra så för positiva tal. Givet ett ickenegativt heltal a_0 och n stycken tal a_1, a_2, ..., a_n som alla tillhör $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ skriver vi

$$a_0.a_1a_2\ldots a_n$$

för det rationella talet

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}.$$

Om $m < n$ gäller dessutom att

$$a_0.a_1a_2\ldots a_m \leq a_0.a_1a_2\ldots a_n < a_0.a_1a_2\ldots a_m + \frac{1}{10^m}.$$

Med en *oändlig decimalutveckling* menar vi ett formellt uttryck

$$a_0.a_1a_2\ldots$$

där, precis som tidigare, a_0 är ett heltal och alla andra a_k tillhör mängden $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. (Med terminologin i kapitlet om talföljder kan vi i stället använda begreppet talföljd (a_k).) Mängden

$$\{a_0.a_1a_2\ldots a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

av reella tal är icketom (till exempel finns $a_0 + a_1/10$ där), och begränsad ovanifrån av $a_0.a_1 + 1/10$. Enligt supremumaxiomet finns en en minsta övre begränsning $a \in \mathbb{R}$ till mängden. Vi säger att $a_0.a_1a_2\ldots$ utgör en decimalutveckling för det reella talet a, och omvänt säger vi att talet a representeras av denna decimalutveckling, och det är vad vi menar då vi skriver

$$a = a_0.a_1a_2\ldots$$

För varje positivt heltal n gäller det då att

$$a_0.a_1a_2\ldots a_n \leq a_0.a_1a_2\ldots \leq a_0.a_1a_2\ldots a_n + \frac{1}{10^n},$$

och en konsekvens av detta är att det i princip är enkelt att avgöra vilket av två tal på decimalform som är störst — det räcker att jämföra deras decimalutvecklingar. Man får dock vara lite försiktig, ty vissa reella tal kan representeras av flera decimalutvecklingar, något som visar sig ske precis då decimalutvecklingen slutar med en följd nior eller nollor, som till exempel

$$0.1999\ldots = 0.2000\ldots$$

Omvänt så gäller det att varje reellt tal kan skrivas på decimalform. För givet positivt reellt tal a kan vi nämligen för varje $m \in \mathbb{N}$ tillämpa övning 1.16c) med $q = 10^m$, där m är positiva heltal, för att finna en ändlig decimal (ett rationellt tal) $a_0.a_1a_2...a_m$ sådant att

$$a_0.a_1a_2...a_m \leq a \leq a_0.a_1a_2...a_m + \frac{1}{10^m}.$$

Vidare visar det sig att talen $a_0, a_1, a_2, \ldots a_m$ som på detta sätt bestämdes vid steg m inte ändras då samma procedur upprepas med m ersatt av $m+1$. Vi får på så sätt (induktivt) i varje steg ett nytt tal a_{m+1} att tillfoga till de vi redan har. Detta kan fortsättas för att få godtyckligt många decimaler i utvecklingen av a.

Du bör på egen hand tänka igenom att inget väsentligt ändras då vi tillåter negativa tal.

1.5 Ett par utvidgningar av de reella talen

De utvidgade reella talen

Det visar sig ofta vara användbart att till de reella talen tillfoga $+\infty$ ("plus oändligheten") och $-\infty$ ("minus oändligheten"), och använda sig av de utvidgade reella talen, $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. För alla reella tal x gäller det att $-\infty < x < +\infty$ och

$$x + (+\infty) = +\infty, \quad x - (+\infty) = -\infty, \quad \frac{x}{+\infty} = 0,$$
$$x + (-\infty) = -\infty, \quad x - (-\infty) = +\infty, \quad \frac{x}{-\infty} = 0,$$

samt

$$x \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty, & x > 0, \\ -\infty, & x < 0, \end{cases} \qquad x \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, & x > 0, \\ +\infty, & x < 0. \end{cases}$$

Vidare låter vi

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \qquad (+\infty) - (-\infty) = +\infty,$$
$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty, \qquad (-\infty) - (+\infty) = -\infty,$$

samt

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty,$$
$$(-\infty) \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty.$$

Uttryck som $0 \cdot (+\infty)$, $(+\infty)/(-\infty)$ och $(+\infty) + (-\infty)$ lämnar vi dock odefinierade. Vi tillåter oss dock att använda $\pm\infty$ som ändpunkter i intervall, och skriver då till exempel $(0, +\infty)$ för mängden av alla reella tal x sådana att $x > 0$.

Komplexa tal

Även om de reella talen är fullständiga och har många bra egenskaper, så saknar även de vissa egenskaper. En sådan är att polynomekvationer med reella tal som koefficienter inte alltid har reella tal som lösningar (exempel: $x^2 + 1 = 0$). Det visar sig att de komplexa talen inte har denna defekt (man säger att de komplexa talen är algebraiskt slutna). Vi kommer främst att arbeta med reella tal, men då och då kommer vi även att använda oss av komplexa tal, och därför ger vi en kort introduktion till dem här.

Med ett *komplext tal* menar vi ett ordnat talpar (x, y), där x och y är reella tal. För det komplexa talet $z = (x, y)$ kallar vi x för dess realdel och y för dess imaginärdel och skriver $x = \operatorname{Re} z$ och $y = \operatorname{Im} z$.

Två komplexa tal $z_1 = (x_1, y_1)$ och $z_2 = (x_2, y_2)$ är lika precis då $x_1 = x_2$ och $y_1 = y_2$, och vi skriver då $z_1 = z_2$. Med z_1 och z_2 som ovan definierar vi vidare summan $z_1 + z_2$ och produkten $z_1 z_2$ som

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \text{och} \\ z_1 z_1 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned}$$

Mängden av komplexa tal betecknar vi med $\mathbb{C}$. Med $(0, 0)$ i rollen av 0 och $(1, 0)$ i rollen av 1 så uppfyller $\mathbb{C}$ axiomen axiom 1.1–1.5, och bildar alltså en kropp.

Eftersom $(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$ och $(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = x_1 x_2$ kommer komplexa tal på formen $(x, 0)$ att uppfylla samma algebraiska egenskaper som reella tal. Vi kan alltså, genom att identifiera $(x, 0)$ med x se de reella talen som en delmängd av de komplexa. Inför man vidare den *imaginära enheten i* som $(0, 1)$ kan man entydigt skriva varje komplext tal (x, y) som $x + iy$, och de vanliga räknereglerna gäller, med tillägget $i^2 = -1$. Vi skall inte gräva mer i detta, men lämnar några egenskaper till dig att fylla i som en övning.

1.6 Problem

1.1 Visa att det för reella tal a, b och c gäller att $a + (b + c) = (a + b) + c$.

1.2 Addition av positiva tal ger positiva tal. Addition av negativa tal ger negativa tal. Multiplikation av positiva tal ger positiva tal. Multiplikation av negativa tal ger positiva tal. Om ett tal är positivt och ett annat negativt blir dess produkt negativ. Visa dessa påståenden.

1.3 För varje $a \in \mathbb{R}$ gäller att $a \cdot a \geq 0$. Speciellt, $1 = 1 \cdot 1 > 0$. Här erhålls sträng olikhet eftersom $0 \neq 1$.

1.4 Om $a > b > 0$ så gäller det att $1/a < 1/b$.

T 1.5 Antag att a och b är givna tal, och att det för varje $\varepsilon > 0$ gäller att $a \leq b + \varepsilon$. Då är $a \leq b$.

L 1.6 Vi definerar *absolutbeloppet* $|a|$ av det reella talet a som

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

På tallinjern tolkas $|a|$ som avståndet från talet a till origo. Följande enkla men viktiga resultat kallas triangelolikheten eftersom det i en annan tappning innebär att varje sida i en triangel är kortare än summan av de andra två.

a) Visa *triangelolikheten*, dvs att det för alla $a, b \in \mathbb{R}$ gäller att

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

b) Visa *omvända triangelolikheten*, dvs för alla $a, b \in \mathbb{R}$ gäller det att

$$|a - b| \geq \big||a| - |b|\big|.$$

1.7 Visa att om det för varje $\varepsilon > 0$ gäller att $|a - b| < \varepsilon$ så måste det i själva verket gälla att $a = b$.

1.8 Visa att $|a| \geq 0$ för alla $a \in \mathbb{R}$ och att $|a| = 0$ precis då $a = 0$.

1.9 Visa att $|a| < \varepsilon$ om och endast om $-\varepsilon < a < \varepsilon$.

1.10 För $a, b \in \mathbb{R}$ gäller att $|ab| = |a| \cdot |b|$. Dessutom gäller det att $|a|^2 = a^2$ för alla $a \in \mathbb{R}$.

1.11 Antag att $s = \sup A$. Om $b < s$ så existerar $a \in A$ så att $a > b$.

1.12 Bevisa att $\sqrt{2}$ inte är rationellt. Mer allmänt, bevisa för $n \in \mathbb{N}$ att $\sqrt{n}$ är rationellt om och endast om n är kvadraten av något annat naturligt tal.

1.13 Låt $y > 0$. Visa att ekvationen $x^2 = y$ har precis två lösningar.

S 1.14 Vilket rationellt tal representeras av $0.8\overline{13}$, där strecket ovanför 13 indikerar att den delen av decimalutvecklingen fortsätter periodiskt.

S 1.15 Är det reella talet $0.101001000100001000001\ldots$ rationellt? Här fortsätter decimalutvecklingen med ettor och nollor, och antalet nollor mellan ettorna ökar med ett i varje steg.

1.16 Denna uppgift går ut på att bevisa sats 1.12, vilket sker i etapper.

a) Visa att det givet $\varepsilon > 0$ existerar $n \in \mathbb{N}$ så att $1/n < \varepsilon$.

b) Visa att det givet $a \in \mathbb{R}$ existerar ett heltal n så att $n \leq a < n + 1$. (Talet n brukar kallas *heltalsdelen* av a och betecknas $\lfloor a \rfloor$.)

c) Antag att $a \in \mathbb{R}$ och $q \in \mathbb{N}$. Då existerar $n \in \mathbb{Z}$ så att olikheten $n/q \leq a < (n + 1)/q$ är uppfylld.

d) Givet $a \in \mathbb{R}$ och $\varepsilon > 0$ existerar (minst) ett rationellt tal r så att $|a - r| < \varepsilon$, dvs påståendet i sats 1.12 är sant.

1.17 Visa att det reella talet a är rationellt om och endast om dess decimalutveckling från och med någon decimal blir periodisk.

T 1.18 Visa att om $x, y \in \mathbb{R}$, ej båda 0, och $z = x + iy$, så gäller det att

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

1.19 Låt för $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ det så kallade *konjugatet* $\bar{z}$ definieras som $\bar{z} = x - iy$. Visa att det för komplexa tal z och w gäller att

a) $\overline{z + w} = \bar{z} + \overline{w}$,

b) $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \overline{w}$,

c) $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$, och $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$,

d) $z\bar{z} \in \mathbb{R}$ och är positivt, förutom för $z = 0$.

1.20 Vi inför för $z \in \mathbb{C}$ *absolutbeloppet* $|z|$ av det komplexa talet z som $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$. Visa att det för komplexa tal z och w gäller att

a) $|z| > 0$ om $z \neq 0$, och $|0| = 0$,

b) $|zw| = |z| \cdot |w|$,

c) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ och $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$,

d) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (triangelolikheten för komplexa tal).

2

Talföljder, konvergens och mer om reella tal

2.1 Talföljder

Vi säger att vi har en *talföljd*

$$u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots$$

om det mot varje naturligt tal k svarar ett tal u_k. För formens skull gör vi följande definition.

Definition 2.1. Med en *reell talföljd* menar vi en funktion från $\mathbb{N}$ till $\mathbb{R}$, och med en *komplex talföljd* menar vi en funktion från $\mathbb{N}$ till $\mathbb{C}$.

Vi kommer att använda beteckningen (u_k) för talföljden som definieras av funktionen $k \mapsto u_k$, och vi kommer ofta att skriva u_1, u_2, …, u_k, …. Ibland anger vi talföljder genom att räkna upp några av dess första element, och utgår ifrån att den bakomliggande funktionen därmed blir känd.

Exempel 2.2. Vilket är det tionde talet i följden 1, 2, 4, 8, …?

Lösning Vi känner igen talen som tvåpotenser, $1 = 2^0$, $2 = 2^1$, $4 = 2^2$ och $8 = 2^3$, och misstänker därför att det tionde talet är 2^9, dvs 512. ∎

Vi kan inte vara helt säkra på att det tionde talet i följden verkligen är 512. Det skulle ju kunna vara så att den som skapat följden med tal ovan har tänkt sig att den inte alls ges av tvåpotenser. Till exempel skulle det kunna vara så att tal nummer k i stället bestäms av $(k^3 - 3k^2 + 8k)/6$, eller någon annan funktion som ger värdena 1, 2, 4 samt 8 om k ersätts med 1, 2, 3 respektive 4. Med ovanstående formel skulle det tionde talet i följden bli $(10^3 - 3 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10)/6 = 130$. Detta innebär att vi skall vara försiktiga med att använda oss av de tre prickarna … och utgå ifrån att den som läser förstår vad vi menar. Det hade här varit tydligare att skriva 1, 2, 4, 8, …, 2^{k-1}, ….

Även om det enklaste sättet att beskriva en talföljd är via en formel för den bakomliggande funktionen, så dyker de ibland upp på annat vis. Fibonaccis[8] talföljd (F_k), som först dök upp då Fibonacci betraktade kaninpopulationer, definieras genom att sätta de första två elementen i talföljden till 1, $F_0 = F_1 = 1$. Därefter definieras varje term som summan av de två föregående, $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$. Till exempel blir $F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 1 = 2$. De första sju elementen i Fibonaccis talföljd blir alltså 1, 1, 2, 3, 5, 8 och 13. Vi säger att vi har gjort en *rekursiv* definition av talföljden.

Ibland är det svårt att skriva ned en formel för elementen i en talföljd. Låt till exempel u_k vara ett närmevärde av $\sqrt{2}$ med k korrekta decimaler. Det gäller att $u_1 = 1.4$, $u_2 = 1.41$, $u_3 = 1.414$ och $u_4 = 1.4143$. Men hur vet vi det, och hur kan vi bestämma nästa tal i följden?

2.2 Induktion

Vi diskuterar här induktionsprincipen, ett verktyg för att bevisa familjer av påståenden indexerade av naturliga tal. Vi kommer bland annat att använda den för att bestämma slutna formler för talföljder och för att visa olikheter.

Antag att vi har en följd av påståenden. Om det första påståendet är sant, och om varje sant påstående följs av ett sant påstående så måste alla påståenden vara sanna. Detta är den så kallade *induktionsprincipen*, vilken vi tar som ett axiom, dvs ett påstående som vi godtar utan bevis.

Vi observerar att

$$\begin{aligned}
1 &= 1,\\
1+2 &= 3,\\
1+2+3 &= 6,\\
1+2+3+4 &= 10,\\
1+2+3+4+5 &= 15,\\
1+2+3+4+5+6 &= 21.
\end{aligned}$$

Ser du något mönster? Hur blir det om vi adderar de första n naturliga talen? Kan vi hitta en enkel formel? Summorna ser ut att växa åtminstone kvadratiskt. Kanske kan man finna en allmän formel för summan av de

[8] Leonardo av Pisa, ca 1170–ca 1250, italiensk matematiker

n första naturliga talen på formen $a + bn + cn^2$? Om vi sätter in $n = 1$, $n = 2$ och $n = 3$ så skulle det då gälla att

$$a + b + c = 1, \quad a + 2b + 4c = 3, \quad a + 3b + 9c = 6.$$

Detta system har lösningen $a = 0$, $b = c = 1/2$. En kandidat för summan av de n första naturliga talen är därför $n(n+1)/2$. Du kan sätta in $n = 4$, $n = 5$, och $n = 6$ för att verifiera att formeln stämmer i dessa fall. Vi använder nu induktion för att bevisa den för alla $n \in \mathbb{N}$.

Exempel 2.3. Visa att det för varje $n \in \mathbb{N}$ gäller att

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{2.1}$$

Lösning Vi har redan sett att (2.1) stämmer för $n = 1$. Antag att den stämmer för något $k \in \mathbb{N}$, dvs antag att

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Vi adderar talet $k + 1$ till bägge sidor och får

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Detta är precis (2.1) med n ersatt av $k + 1$. Vi har alltså visat att (2.1) är sann för $n = k + 1$ om den är det för $n = k$. Enligt induktionsprincipen gäller därför (2.1) för alla $n \in \mathbb{N}$. ∎

Sats 2.4. (Triangelolikheten) *Låt $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Det gäller att*

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \le |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|. \tag{2.2}$$

Bevis Olikheten är uppenbarligen sann i fallet $n = 1$, $|a_1| \le |a_1|$. Antag nu att (2.2) är sann för n termer. Då är den även sann för $n + 1$ termer, eftersom triangelolikheten med två termer (se övning 1.6) ger oss

$$\begin{aligned}
|a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}| &= |(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + a_{n+1}| \\
&\le |a_1 + a_2 + \cdots + a_n| + |a_{n+1}| \\
&\le |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + |a_{n+1}|.
\end{aligned}$$

Enligt induktionsprincipen gäller därmed (2.2) för alla $n \in \mathbb{N}$. ∎

2.3 Gränsvärdesdefinitionen

Definition 2.5. Talföljden (a_k) har *gränsvärdet* A precis då det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett heltal N så att

$$k > N \implies |a_k - A| < \varepsilon.$$

Om (a_k) har gränsvärdet A skriver vi antingen

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = A \qquad \text{eller} \qquad a_k \to A \quad \text{då} \quad k \to +\infty.$$

Vill vi spara lite plats skriver vi $\lim a_k = A$ eller $a_k \to A$. En talföljd som har ett gränsvärde sägs vara *konvergent*. En talföljd som saknar gränsvärde kallas *divergent*.

Exempel 2.6. Det gäller att $\lim 1/k = 0$.

Lösning För givet $\varepsilon > 0$ gäller det nämligen att $|1/k - 0| = 1/k < \varepsilon$ om bara $k > 1/\varepsilon$. Vilket N som helst som är större än $1/\varepsilon$ duger alltså. ∎

Observera att N i allmänhet beror på ε.

Exempel 2.7. Visa att följden $k \mapsto (-1)^k$ är divergent.

Lösning Anledningen till att följden inte konvergerar är förstås att talen alternerar mellan att vara 1 och -1, och inte närmar sig *ett* värde. Om den konvergerat mot något A så skulle det nämligen gälla att avståndet från A till något av talen 1 och -1 skulle vara minst 1. Med $\varepsilon = 1/2$ blir det därför omöjligt att finna N så att $|(-1)^k - A| < \varepsilon$ för alla $k > N$. ∎

2.4 Räkneregler och egenskaper för talföljder

Det är opraktiskt att arbeta med gränsvärdesdefinitionen. Vi skall därför visa några räkneregler och satser som underlättar det för oss att avgöra konvergensfrågan. Innan vi gör det observerar vi att varje konvergent talföljd är begränsad, där vi menar att talföljden (a_k) är *begränsad* om det finns ett tal C så att $|a_k| \le C$ för alla k.

Sats 2.8. *Varje konvergent talföljd är begränsad.*

Bevis Antag att $\lim a_k = A$. Då finns N så att $|a_k - A| < 1$ om $k > N$ (tag $\varepsilon = 1$ i definitionen). Triangelolikheten ger att det för $k > N$ gäller att

$$|a_k| = |a_k - A + A| \le |a_k - A| + |A| < 1 + |A|.$$

Låter vi C vara det största av talen $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|$ och $1 + |A|$ så finner vi att $|a_k| \le C$ för alla $k \in \mathbb{N}$. ∎

Den konvergenta talföljden $k \mapsto 1/k$ är begränsad ($|1/k| \le 1$) för alla $k \in \mathbb{N}$. Den divergenta talföljden $k \mapsto (-1)^k$ är också begränsad eftersom $|(-1)^k| = 1$ för alla $k \in \mathbb{N}$. En begränsad talföljd behöver alltså inte vara konvergent.

Sats 2.9. (Räkneregler för gränsvärden) *Antag att c är ett tal, och att $a_k \to A$ och $b_k \to B$ då $k \to +\infty$. Då gäller det, när $k \to +\infty$, att*

a) $a_k + b_k \to A + B$,

b) $c \cdot a_k \to cA$,

c) $a_k b_k \to AB$,

d) $1/a_k \to 1/A$ *(om $a_k \neq 0$ för alla k och $A \neq 0$).*

Bevis Låt $\varepsilon > 0$ vara givet. I samtliga delar nedan låter vi N_a och N_b vara tal sådana att $|a_k - A| < \varepsilon$ om $k > N_a$ och $|b_k - B| < \varepsilon$ om $k > N_b$.

a) Triangelolikheten ger att

$$|(a_k + b_k) - (A + B)| \leq |a_k - A| + |b_k - B| < 2\varepsilon$$

om k är större än det största av talen N_a och N_b. Det spelar ingen roll att det står 2ε i stället för ε i högerledet. Det viktiga är att differensen $(a_k + b_k) - (A + B)$ kan göras hur liten som helst om k bara är tillräckligt stort. I fortsättningen accepterar vi en konstant multiplicerad med ε utan kommentar.

b) Här behöver vi bara bryta ut $|c|$, och får att

$$|c \cdot a_k - cA| = |c| \cdot |a_k - A| < |c|\varepsilon, \quad \text{om } k > N_a.$$

c) Idén är att lägga till och dra ifrån en term för att skriva differensen $a_k b_k - AB$ på en för oss mer aptitlig form. Om vi lägger till och drar ifrån $a_k B$ får vi

$$\begin{aligned} a_k b_k - AB &= a_k b_k - a_k B + a_k B - AB \\ &= a_k(b_k - B) + B(a_k - A). \end{aligned}$$

Detta är nyckeln till beviset och vi har vunnit tack vare att det som står i parenteserna kommer att bli litet. Triangelolikheten ger att

$$\begin{aligned} |a_k b_k - AB| &= |a_k(b_k - B) + B(a_k - A)| \\ &\leq |a_k| \cdot |b_k - B| + |B| \cdot |a_k - A|. \end{aligned}$$

Det enda orosmolnet som återstår är faktorn $|a_k|$ framför $|b_k - B|$. Men eftersom (a_k) är konvergent är följden begränsad, dvs det existerar ett tal C så att $|a_k| \leq C$ för alla $k \in \mathbb{N}$. Det innebär att

$$|a_k b_k - AB| \leq C|b_k - B| + |B| \cdot |a_k - A| < (C + |B|)\varepsilon$$

om k är större än det största av N_a och N_b. Vi kan alltså göra skillnaden mellan $a_k b_k$ och AB godtyckligt liten om k är tillräckligt stort. Det betyder att $\lim a_k b_k = AB$.

d) Vi skriver om differensen $1/a_k - 1/A$ på gemensam nämnare,

$$\frac{1}{a_k} - \frac{1}{A} = \frac{1}{a_k A}(A - a_k).$$

Den andra faktorn kommer att bli liten för stora k. Vi måste se till att den första förblir begränsad för stora k. Men $a_k \to A \neq 0$ innebär att $|a_k - A| \leq |A|/2$ om k är tillräckligt stort, säg $k > N_c$. Den omvända triangelolikheten (se problem 1.6) ger

$$|a_k| = |A + a_k - A| \geq |A| - |a_k - A| \geq |A| - \frac{1}{2}|A| = \frac{1}{2}|A|$$

för dessa k. Alltså är $|1/(a_k A)| \leq 2/|A|^2$, och

$$\left|\frac{1}{a_k} - \frac{1}{A}\right| = \frac{1}{|a_k A|}|A - a_k| < \frac{2}{|A|^2}\varepsilon$$

om k är större än det största av talen N_a och N_c. ▮

Exempel 2.10. Bestäm gränsvärdet $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{5k^2 - 3k + 1}{2k^2 + 4k - 10}$.

Lösning Vi bryter ut och förkortar med k^2, och använder räknereglerna och det faktum att $\lim 1/k = 0$,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{5k^2 - 3k + 1}{2k^2 + 4k - 10} = \lim_{k\to+\infty} \frac{5 - 3/k + 1/k^2}{2 + 4/k - 10/k^2} = \frac{5 + 0 + 0}{2 + 0 - 0} = \frac{5}{2}. \quad ▮$$

Sats 2.11. (Instängningssatsen för följder) *Om $a_k \leq b_k \leq c_k$ för alla $k \in \mathbb{N}$ och $\lim a_k = \lim c_k$ så existerar $\lim b_k$, och*

$$\lim a_k = \lim b_k = \lim c_k.$$

Bevis Låt $A = \lim a_k = \lim c_k$. Enligt antagande är

$$a_k - A \leq b_k - A \leq c_k - A.$$

Givet $\varepsilon > 0$ existerar N så att $|a_k - A| < \varepsilon$ och $|c_k - A| < \varepsilon$ om $k > N$. För dessa k blir $-\varepsilon < a_k - A \leq b_k - A \leq c_k - A < \varepsilon$, dvs $|b_k - A| < \varepsilon$. Men detta betyder precis att $\lim b_k = A$. ▮

Exempel 2.12. Visa att $\lim \dfrac{k!}{k^k} = 0$.

Lösning För varje positivt heltal k gäller att

$$0 < \frac{k!}{k^k} = \frac{1}{k} \cdot \frac{2}{k} \cdot \frac{3}{k} \cdot \dots \cdot \frac{k}{k} \leq \frac{1}{k}.$$

Eftersom $\lim(1/k) = 0$ följer påståendet av instängningssatsen. ▮

Exempel 2.13. Visa att det för $a > 0$ gäller att $\lim a^{1/k} = 1$.

Lösning Eftersom $a^{1/k} = 1/(1/a)^{1/k}$ räcker det att visa påståendet för $a > 1$. För $a > 1$ och $k \in \mathbb{N}$ är $a^{1/k} > 1$. Bernoullis[9] olikhet (se övning 2.4) med $x = a^{1/k} - 1$ ger

$$a = (1+x)^k \geq 1 + kx = 1 + k(a^{1/k} - 1),$$

varför det följer att $0 < a^{1/k} - 1 \leq (a-1)/k$. Påståendet följer nu av instängningssatsen. ∎

2.5 Monotona talföljder och intervallinkapsling

En talföljd (a_k) sägs vara *växande* om det för varje $k \in \mathbb{N}$ gäller att $a_{k+1} \geq a_k$. Den är i stället *avtagande* om $a_{k+1} \leq a_k$. En talföljd som är antingen växande eller avtagande sägs vara *monoton*. Vi säger att (a_k) är uppåt begränsad av C om $a_k \leq C$ för alla $k \in \mathbb{N}$ och nedåt begränsad av C om $a_k \geq C$ för alla $k \in \mathbb{N}$. En talföljd är alltså begränsad precis då den är både uppåt och nedåt begränsad.

Sats 2.14. (Monotona följders konvergens)

a) *Växande talföljder är konvergenta om och endast om de är uppåt begränsade.*

b) *Avtagande talföljder är konvergenta om och endast om de är nedåt begränsade.*

Bevis Det räcker att visa det första påståendet. Antag att talföljden (a_k) är växande och uppåt begränsad. Enligt supremumaxiomet (se 1.10) existerar det reella talet $A = \sup\{a_k\}$. Vi visar att $\lim a_k = A$.

Låt $\varepsilon > 0$. Eftersom $A = \sup\{a_k\}$ finns något index, N säg, så att $A - \varepsilon < a_N \leq A$, ty annars hade $A - \varepsilon$ också varit en övre begränsning till $\{a_k\}$. Men eftersom (a_k) växer så gäller det att $A - \varepsilon < a_k \leq A$ för alla $k > N$. Alltså är $|a_k - A| < \varepsilon$ då $k > N$, dvs $\lim a_k = A$.

Omvänt så följer det att varje växande och konvergent talföljd är uppåt begränsad eftersom den är begränsad enligt sats 2.8. ∎

Exempel 2.15. Låt talföljden (a_k) vara definierad som

$$a_1 = 2, \quad a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{2}{a_k}\right), \quad k \geq 1.$$

Visa att $\lim a_k = \sqrt{2}$.

---

[9] Jakob Bernoulli, 1654–1705, schweizisk matematiker

Lösning Vi börjar med att visa att om gränsvärdet existerar så måste det vara $\sqrt{2}$. Om $\lim a_k = A$ så är förstås även $\lim a_{k+1} = A$, vilket enligt räknereglerna för gränsvärden medför att

$$A = \frac{1}{2}\left(A + \frac{2}{A}\right).$$

Denna ekvation i A reduceras till $A^2 = 2$. Eftersom $a_k \geq 0$ för varje k kan A inte vara negativt, så det måste gälla att $A = \sqrt{2}$.

Det återstår att visa att (a_k) har ett gränsvärde, och det gör vi genom att visa att talföljden är avtagande och nedåt begränsad. Vi börjar med att visa att a_k är nedåt begränsad av $\sqrt{2}$, vilket är klart för $k = 1$ eftersom $2 \geq \sqrt{2}$. För $k \geq 1$ gäller att

$$a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{2}{a_k}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_k} - \sqrt{\frac{2}{a_k}}\right)^2 + \sqrt{2} \geq \sqrt{2}.$$

Vi visar nu att (a_k) är avtagande. Det gäller att

$$a_{k+1} - a_k = \frac{1}{2}\left(-a_k + \frac{2}{a_k}\right) = \frac{1}{2}\frac{2 - a_k^2}{a_k} \leq 0.$$

I det sista steget använde vi den undre begränsningen $a_k \geq \sqrt{2}$ som vi just visat. Det följer att gränsvärdet $\lim a_k$ existerar, $\lim a_k = \sqrt{2}$. ∎

Påståendet i följande sats är ekvivalent med supremumaxiomet, i den mening att vi hade kunnat använda vilket som helst av dem som axiom och därifrån härlett det andra. Beviset vi ger bygger på sats 2.14 om monotona följders konvergens, som vi ju använde supremumaxiomet för att visa.

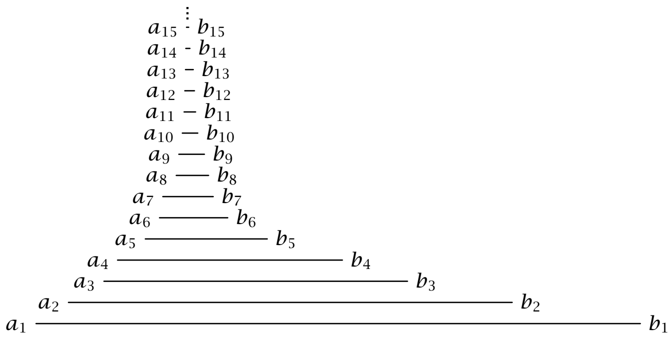
SATS 2.16. (INTERVALLINKAPSLINGSSATSEN) *Antag att*

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$$

är en följd av kompakta intervall. Då finns det minst ett tal ξ som tillhör alla intervall I_k.

Bevis Vi låter följderna (a_k) och (b_k) definieras så att $I_k = [a_k, b_k]$. Då är (a_k) växande och $a_k \leq b_1$ för alla k. Satsen om monoton konvergens, 2.14, ger att gränsvärdet $\alpha = \lim a_k$ existerar. Av samma anledning konvergerar (b_k) mot något β. Eftersom $a_k \leq b_k$ så gäller det att $\alpha \leq \beta$. Vilket ξ som helst som uppfyller $\alpha \leq \xi \leq \beta$ duger. ∎

Anmärkning Om längden $b_k - a_k$ av intervallen (I_k) konvergerar mot 0 så finns det precis ett tal ξ som tillhör alla I_k (figur 2.1).



FIGUR 2.1

2.6 EULERS TAL

Vi skall nu se hur Eulers[10] tal e kan definieras som ett gränsvärde. Vi värmer upp med ett par hjälpresultat.

LEMMA 2.17. *För varje* $0 < k \le n$ *gäller det att*

$$1 + \frac{k}{n} \le \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k < 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}.$$

Bevis Vi visar olikheten $(1 + 1/n)^k < 1 + k/n + k^2/n^2$ genom att fixera $n \in \mathbb{N}$ och använda induktion över k. Den andra olikheten visas analogt. Olikheten gäller för $k = 1$, eftersom $1 + 1/n < 1 + 1/n + 1/n^2$. Antag nu att olikheten är sann för k, där $k < n$. Då gäller det att

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+1} &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
&< \left(1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
&= 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{(k+1)^2}{n^2} + \frac{k^2 - n(k+1)}{n^3} \\
&< 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{(k+1)^2}{n^2},
\end{aligned}$$

där vi i det sista steget använt att $k^2 < n(k+1)$, vilket är sant för $k < n$.

Anmärkning Genom att låta $k = n$ erhåller vi instängningen

$$2 \le \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3, \quad n \in \mathbb{N}.$$

---

[10] Leonhard Euler, 1707–1783, schweizisk matematiker

Lemma 2.18. *Följden $k \mapsto (1 + 1/k)^k$ är växande.*

Vi ger två bevis.

Bevis (genom granskning av termerna) Med hjälp av binomialsatsen kan $(1 + 1/k)^k$ skrivas som

$$\begin{aligned} &1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 - \frac{2}{k}\right) \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 - \frac{2}{k}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{k}\right). \end{aligned}$$

För $(1 + 1/(k+1))^{k+1}$ får vi i stället

$$\begin{aligned} &1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)\left(1 - \frac{2}{k+1}\right) \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)\left(1 - \frac{2}{k+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{k+1}\right) \\ &\quad + \frac{1}{(k+1)!}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)\left(1 - \frac{2}{k+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{k}{k+1}\right). \end{aligned}$$

De första $k+1$ termerna kan jämföras term för term, och de i utvecklingen av $(1+1/(k+1))^{k+1}$ är alltid minst lika stora som de i $(1+1/k)^k$. Vidare finns en sista extra term i utvecklingen av $(1 + 1/(k+1))^{k+1}$, och den är positiv. Alltså följer det att $(1 + 1/k)^k < (1 + 1/(k+1))^{k+1}$. ∎

Bevis (med geometrisk summa) Låt $0 \le a < b$ vara reella tal och $k \in \mathbb{N}$. Då gäller följande uppskattning för den geometriska summan,

$$\frac{1 - (a/b)^{k+1}}{1 - a/b} = 1 + \frac{a}{b} + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{a}{b}\right)^k < 1 + k.$$

Multiplikation med b^k ger

$$\frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{b - a} < b^k(1 + k), \quad \text{dvs} \quad ((k+1)a - kb)\, b^k < a^{k+1}.$$

Låter vi $a = 1 + 1/(k+1)$ och $b = 1 + 1/k$ står där

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1}. \quad ∎$$

Enligt lemma 2.18 är $k \mapsto (1 + 1/k)^k$ växande, och enligt anmärkningen efter lemma 2.17 är följden begränsad ovanifrån av 3. Enligt sats 2.14 existerar därför gränsvärdet $\lim(1 + 1/k)^k$.

Definition 2.19. (Eulers tal) Vi definierar *Eulers tal e* som

$$e = \lim_{k \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k.$$

Vi har sett att $2 \leq e \leq 3$. I själva verket är $e \approx 2.718$. En representation av talet e som en serie återfinns i övning 3.14, och i övning 3.15 visar du att talet e är irrationellt.

2.7 Cauchyföljder

Antag att (a_k) är en talföljd som vi vill undersöka om den är konvergent eller ej. Enligt definitionen för konvergent följd, skall vi då söka ett tal A sådant att det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett N så att $|a_k - A| < \varepsilon$ om $k > N$. Men det kan vara svårt att hitta talet A, och vi har kanske ingen aning om var vi ska leta. Vi såg tidigare att begränsade monotona talföljder är konvergenta, men alla konvergenta talföljder är inte monotona. Frågan är om vi kan avgöra om följden (a_k) är konvergent utan att blanda in talet A. Här kommer så kallade Cauchyföljder[11] in.

Definition 2.20. Talföljden (a_k) kallas för en *Cauchyföljd*om det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett heltal N så att

$$k, l > N \implies |a_k - a_l| < \varepsilon.$$

En Cauchyföljd är alltså en följd sådan att avståndet mellan två tal a_k och a_l i följden blir hur litet som helst om bara k och l väljs tillräckligt stora.

Vi ska om en stund visa att en talföljd är konvergent om och endast om den är en Cauchyföljd. Om vi ska visa att en följd (a_k) är konvergent, behöver vi alltså bara visa att det är en Cauchyföljd. Vi behöver alltså inte hitta gränsvärdet, utan det räcker att visa att $|a_k - a_l|$ blir hur litet som helst om k och l är tillräckligt stora. Detta underlättar ofta mycket, vilket gör detta resultat viktigt.

För att visa att en talföljd är konvergent om och endast om den är en Cauchyföljd, kommer vi att behöva en annan viktig sats om konvergens av så kallade delföljder.Om (a_k) är en talföljd, och (n_k) är en strängt växande följd av naturliga tal, så säger vi att följden $(b_k) = (a_{n_k})$ är en delföljd till (a_k). En delföljd till (a_k) är alltså en talföljd som vi kan bilda genom att välja ut oändligt många av talen i (a_k) utan att ändra på den inbördes ordningen.

Sats 2.21. (Bolzano[12]–Weierstrass[13] sats) *Varje begränsad talföljd har en konvergent delföljd.*

Bevis Antag att (a_k) är en begränsad talföljd. Då finns det ett intervall $I_1 = [x_0, x_1]$ sådant att $a_k \in [x_0, x_1]$ för alla k.

---

[11] Augustin Louis Cauchy, 1789–1857, fransk matematiker

[12] Bernard Bolzano, 1781–1848, österrikisk matematiker

[13] Karl Weierstraß, 1815–1897, tysk matematiker

Låt $x_2 = (x_0 + x_1)/2$ vara mittpunkten i $I_1 = [x_0, x_1]$. Då måste minst ett av intervallen $[x_0, x_2]$ och $[x_1, x_2]$ vara sådant att det innehåller a_k för oändligt många k. Låt I_2 ett av intervallen $[x_0, x_2]$ och $[x_2, x_1]$ som har nämnda egenskap. Vi fortsätter nu induktivt på samma sätt. Antag att I_n är ett intervall sådant att $a_k \in I_n$ för oändligt många k. Då delar vi I_n i två halvor och låter I_{n+1} vara en av halvorna till I_n med egenskapen att $a_k \in I_{n+1}$ för oändligt många k.

Vi definierar nu en delföljd till (a_k). Låt $n_1 = 1$. Då är $a_{n_1} \in I_1$. Antag att vi har definierat n_k. Då låter vi n_{k+1} vara större än n_k och sådant att $a_{n_{k+1}} \in I_{k+1}$. Ett sådant n_{k+1} finns eftersom I_{k+1} innehåller oändligt många element från följden. Med hjälp av induktion erhåller vi en delföljd $(b_k) = (a_{n_k})$ med egenskapen att $b_k \in I_k$ för alla k. Vi ska nu visa att (b_k) är konvergent.

Vi observerar att $I_k \subset I_l$ om $k > l$. Enligt intervallinkapslingsatsen (sats 2.16) finns det därför ett tal B sådant att $B \in I_k$ för alla k. Vi visar att (b_k) har gränsvärdet B.

Låt $\varepsilon > 0$. Tag n så stort att $(x_1 - x_0)2^{-n+1} < \varepsilon$. Eftersom I_k har en diameter som är $(x_1 - x_0)2^{-n+1}$ betyder detta att I_k har en diameter som är mindre än ε om $k \geq n$. Låt nu $k > n$. Då är $b_k \in I_k$ och $B \in I_k$, och eftersom I_k har en diameter som är mindre än ε är därför $|b_k - B| < \varepsilon$. Detta visar att (b_k) är konvergent med gränsvärdet B. ∎

Vi har nu ett bra verktyg för att visa att det precis är Cauchyföljderna som är konvergenta. Vi börjar med det enklare hållet, som säger att konvergenta talföljder är Cauchyföljder.

Sats 2.22. *Varje konvergent talföljd är en Cauchyföljd.*

Bevis Antag först att följden (a_k) är konvergent. Vi ska visa att (a_k) är en Cauchyföljd.

Eftersom (a_k) är konvergent finns det ett tal A sådant att det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett N så att $|a_k - A| < \varepsilon$ om $k > N$. Om vi nu kräver att $k, l > N$ gäller det att

$$|a_k - a_l| = |a_k - A + A - a_l| \leq |a_k - A| + |A - a_l| < 2\varepsilon,$$

vilket visar att (a_k) är en Cauchyföljd. ∎

Sats 2.23. *Varje Cauchyföljd är konvergent.*

För att bevisa detta visar vi först att Cauchyföljder är begränsade.

Lemma 2.24. *Varje Cauchyföljd är begränsad.*

Bevis Tag ett $\varepsilon > 0$. Då finns ett N så att $|a_k - a_l| < \varepsilon$ om $k, l > N$. Låt

$$d = \max\{\, |a_k| : 1 \leq k \leq N + 1 \,\} + \varepsilon.$$

Då gäller att $|a_k| \leq d$ för alla k, ty om $k > N$ gäller det att

$$|a_k| = |a_k - a_{N+1} + a_{N+1}| \leq |a_k - a_{N+1}| + |a_{N+1}| < \varepsilon + |a_{N+1}| \leq d,$$

och om $k \leq N$ gäller det förstås att $|a_k| \leq d$. ∎

Bevis (för sats 2.23) Antag att (a_k) är en Cauchyföljd. Då är (a_k) även begränsad enligt lemma 2.24, varför det enligt Bolzano–Weierstraß sats (sats 2.21) finns en konvergent delföljd (a_{n_k}). Vi betecknar delföljdens gränsvärde med A, och visar att även (a_k) konvergerar mot A.

Låt $\varepsilon > 0$. Då finns det ett K så att $|a_{n_k} - A| < \varepsilon$ om $k > K$. Vidare finns det ett N så att $|a_k - a_l| < \varepsilon$ om $k, l > N$. Låt nu M vara större än både n_{K+1} och N. För $k > M$ gäller då att

$$|a_k - A| = |a_k - a_{K+1} + a_{K+1} - A| \leq |a_k - a_{K+1}| + |a_{K+1} - A| < 2\varepsilon.$$

Detta visar att (a_k) är konvergent med gränsvärdet A. ∎

Exempel 2.25. Vi visar att talföljden (a_k) där $a_k = 1/k$ är konvergent. Låt nämligen $\varepsilon > 0$ vara givet, och låt $k > l > N$, och $N > 1/\varepsilon$. Då blir

$$|a_k - a_l| = \frac{1}{l} - \frac{1}{k} < \frac{1}{l} < \frac{1}{N} < \varepsilon. \quad ∎$$

Exempel 2.26. Låt $a_k = 0.d_1d_2\ldots d_k$ decimalutvecklingen av $0.d_1d_2\ldots$, kapad efter k decimaler (se avsnitt 1.4). Då gäller det, om $k > l > N$, att

$$|a_k - a_l| = 0.0\ldots 0d_{l+1}d_{l+2}\cdots d_k < 10^{-l} < 10^{-N},$$

vilket förstås kan göras hur litet som helst om N är tillräckligt stort. ∎

Exempel 2.27. Om vi definierar talföljden (s_k) via $s_k = 1 + 1/2 + \cdots + 1/k$, så existerar inte $\lim s_k$. Det gäller nämligen, för godtyckligt $k \in \mathbb{N}$, att

$$|s_{2k} - s_k| = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k} \geq k \times \frac{1}{2k} = \frac{1}{2},$$

vilket innebär att (s_k) inte är en Cauchyföljd. ∎

2.8 Konstruktion av de reella talen

I kapitel 1 gav vi axiom som de reella talen ska uppfylla. Vi är nu mogna att mottaga en definition av de reella talen. Det finns flera sätt att definiera de reella talen. Ett av dem är genom så kallade dedekindska[14] snitt. Ett annat, som är det vi ska undersöka lite närmare, använder Cauchyföljder.

[14] Richard Dedekind, 1831–1916, tysk matematiker

Som vi har sett i föregående avsnitt är varje Cauchyföljd konvergent. Om vi tittar närmare på beviset för detta upptäcker vi att vi har använt axiomen för de reella talen genom vår användning av intervallinkapslingssatsen.

Vi skall här kortfattat beskriva hur det kan gå till att *konstruera* de reella talen. Man kan starta med de naturliga talen tillsammans med de vanliga räkneregler och regler för ordning som gäller för dessa. Därefter kan man stegvis utvidga, först till heltalen (här krävs lite arbete), och sedan till de rationella talen (här krävs lite mer arbete, men det är inte svårt).

För de rationella talen kan vi definiera Cauchyföljder. Det gäller att talföljden (a_k), som nu består av rationella tal, är en Cauchyföljd om det för varje positivt rationellt ε finns ett heltal N så att $|a_k - a_l| < \varepsilon$ om $k, l > N$.

Om vi då har en Cauchyföljd (a_k) av rationella tal så kan vi inte visa att den är konvergent. Om följden ”konvergerar” mot ett irrationellt tal — som alltså inte är definierade ännu — är följden inte konvergent, eftersom det då inte finns ett rationellt tal A så att $|a_k - A| < \varepsilon$ om k är tillräckligt stort. Talet A skulle ju i så fall vara ett irrationellt tal, och sådana finns ju inte än!

Vi kan då låta följden (a_k) vara en representant för det reella talet A, och man frestas kanske att definiera talet A som följden (a_k). Problemet är att det finns andra Cauchyföljder som ”konvergerar” mot samma tal.

Om (a_k) och (b_k) är två Cauchyföljder av rationella tal så säger vi att dessa är *ekvivalenta*, vilket vi skriver $(a_k) \sim (b_k)$, om $\lim(a_k - b_k) = 0$. Detta motsvarar att de har samma, möjligen irrationella, gränsvärde, och det delar in Cauchyföljderna i *ekvivalensklasser* bestående av rationella Cauchyföljder. I detta begrepp ingår följande tre egenskaper:

1. För varje Cauchyföljd (a_k) gäller det att $(a_k) \sim (a_k)$ (reflexivitet).

2. Om (a_k) och (b_k) är Cauchyföljder och $(a_k) \sim (b_k)$, så gäller det även att $(b_k) \sim (a_k)$ (symmetri).

3. Om (a_k), (b_k) och (c_k) är Cauchyföljder, och om $(a_k) \sim (b_k)$ och $(b_k) \sim (c_k)$, så gäller det även att $(a_k) \sim (c_k)$ (transitivitet).

Tydligen tillhör varje Cauchyföljd av rationella tal exakt en sådan ekvivalensklass, och det är möjligt att göra följande definition.

Definition 2.28. De reella talen är mängden av ekvivalensklasser av rationella Cauchyföljder. Varje reellt tal motsvaras av en ekvivalensklass.

Alltså är ett reellt tal en mängd som består av en massa talföljder av rationella tal. Hur kan vi utföra vanliga räkningar såsom addition och multiplikation med sådana reella tal?

Antag att a och b är två reella tal, det vill säga två ekvivalensklasser av rationella Cauchyföljder. Vi vill definiera $a + b$ och $a \cdot b$. Tag en talföljd (a_k) i ekvivalensklassen a och en talföljd (b_k) i ekvivalensklassen b. Då kan vi definiera nya talföljder (c_k) och (d_k) genom att sätta

$$c_k = a_k + b_k, \qquad d_k = a_k \cdot b_k.$$

Dessa följder ligger i var sin ekvivalensklass, som vi kan kalla för c respektive d. Vi definierar då att $c = a + b$ och att $d = a \cdot b$.

Eftersom vi ovan kan välja olika talföljder (a_k) och (b_k) är det viktigt att fråga sig om summan $a+b$ och produkten $a \cdot b$ beror på vilka talföljder (a_k) och (b_k) som vi valt. Det är inte alls svårt att visa att definitionen för $a + b$ och $a \cdot b$ ovan verkligen ger ett entydigt resultat, men vi ska inte göra det.

På motsvarande sätt kan vi definiera $a - b$, a/b och så vidare. Det inte svårt att visa att dessa definitioner leder till att axiomen för de reella talen är uppfyllda, men vi ska heller inte göra detta.

2.9 Tillämpning: ekvationslösning

Vi uppmanar läsaren att erinra sig beviset för Bolzano–Weierstraß sats (sats 2.21). I det beviset hittade vi en konvergent delföljd genom att upprepade gånger dela ett intervall i två halvor, och välja ut den ena halvan för fortsatt vivisektion. Denna, så kallade intervallhalvering, är en mycket viktig teknik som är användbar inte bara i bevis, utan också i praktiska tillämpningar. Den förtjänar därför att vidare undersökas.

Vi ska här studera hur vi kan använda intervallhalvering. Antag att vi har en funktion f som är definierad på ett intervall, och att vi vill lösa ekvationen $f(x) = 0$. Vissa enkla typer av ekvationer kan lösas med algebraiska metoder, men ofta är det omöjligt att skriva upp ett slutet uttryck för eventuella lösningar. Man är då hänvisad till att hitta approximativa lösningar, vilket ofta är tillräckligt i tillämpningar.

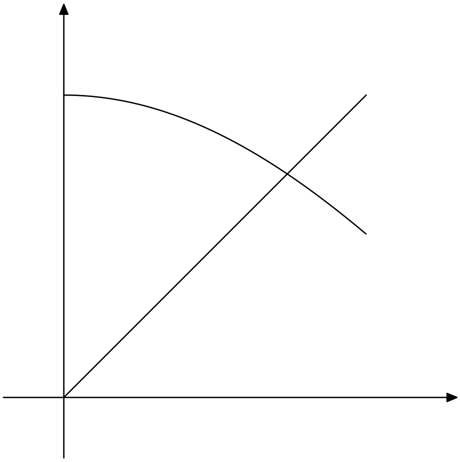
Vi ska beskriva en metod för att med intervallhalvering konstruera en talföljd (a_k) sådan att (a_k) är konvergent med gränsvärdet A och $f(A) = 0$. Även om vi inte kan hitta själva gränsvärdet kan vi då använda talföljden för att få en approximativ lösning till ekvationen $f(x) = 0$. Antag att vi kan nöja oss med en approximativ lösning som skiljer sig från den riktiga med ett fel som är högst 10^{-3}. Då låter vi $\varepsilon = 10^{-3}$ och som vi kommer att se, ger metoden oss då ett explicit N sådant att $|a_k - A| < \varepsilon$ om $k > N$. Vi tar då ett $k > N$ och beräknar a_k, vilket blir vår approximativa lösning.

Metoden går till på följande sätt. Antag att vi har hittat två punkter x_0 och x_1 sådana att $f(x_0) < 0$ och $f(x_1) > 0$. Det finns då minst en punkt i det slutna intervallet I_1 mellan x_0 och x_1 i vilken funktionen f ”växlar tecken". Med detta menar vi att f är positiv i den ena av intervallets ändpunkter och negativ i den andra.

Om vi delar I_1 i två halvor måste en teckenväxling ske i minst en av halvorna, om inte f är 0 i mittpunkten. Men om f är 0 i mittpunkten har vi ju hittat en lösning, så låt oss antaga att så ej är fallet. Vi låter I_2 vara en halva med teckenväxling, och fortsätter sedan på samma sätt att dela inte I_2 i två halvor och så vidare.

På detta sätt erhåller vi en följd $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ av slutna interval, där intervallet I_k har en diameter som är $2^{-k+1}|x_1 - x_0|$. Om vi låter a_k vara t.ex. mittpunkten i I_k så är (a_k) en konvergent följd.

Låt A beteckna gränsvärdet till (a_k). Punkterna a_k och A ligger båda i I_k. Eftersom I_k har en diameter som är $2^{-k+1}|x_1 - x_0|$ och a_k är mittpunkten är $|a_k - A| \leq 2^{-k}|x_1 - x_0|$.



FIGUR 2.2

Vi illustrerar med ett exempel hur vi med hjälp av en dator kan lösa ekvationer approximativt.

EXEMPEL 2.29. Lös ekvationen $\cos x = x$ i intervallet $[0, 1]$.

Lösning Vi låter $f(x) = \cos x - x$ och observerar att $f(0) = 1$ och $f(1) < 0$. Det sker alltså en teckenväxling i intervallet $[0, 1]$.

Vi delar intervallet i två halvor och undersöker mittpunkten $1/2$. Med datormaskin får vi att $f(\frac{1}{2}) \approx 0.378$. Alltså finns det en teckenväxling i intervallet $I_2 = [1/2, 1]$. Mittpunkten till I_2 är $3/4$ och vi har att $f(3/4) \approx -0.018$. Alltså har vi en teckenväxling i intervallet $I_3 = [1/2, 3/4]$. Mittpunkten till I_3 är $5/8$ och vi har att $f(5/8) \approx 0.186$. Alltså har vi en teckenväxling i intervallet $I_4 = [5/8, 3/4]$. Mittpunkten till I_3 är $a_3 = 11/16$ och eftersom I_3 har en diameter som är 2^{-2} är avståndet mellan a_3 och gränsvärdet A högst 2^{-3}. Om vi approximerar lösningen till $\cos x - x = 0$

med $11/16$ gör vi alltså ett fel som är högst 2^{-3}. Om vi önskar en bättre uppskattning utför vi bara några ytterligare intervallhalveringar. ∎

Den uppmärksamma läsaren har kanske lagt märke till att vår beskrivning av lösningen av $f(x) = 0$ genom intervallhalvering inte är fullständig. Vi får förvisso en följd av intervall $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$ sådan att för varje k är f positiv i ena ändpunkten till I_k och negativ i den andra. Följden av mittpunkter måsta då vara konvergent med ett gränsvärde som vi kan kalla A.

Kan vi vara säkra på att $f(A) = 0$? Svaret är nej. Antag till exempel att f är definierad på intervallet $[0,1]$ och att f är 1 på $[0,1/3]$ och -1 på $(1/3,1]$. Ekvationen $f(x) = 0$ saknar ju då lösning, men likväl ger oss metoden med intervallhalvering en approximativ lösning. Metoden fungerar alltså inte för alla funktioner.

För att vara säkra på att metoden fungerar behöver vi till exempel veta att f är en så kallad *kontinuerlig* funktion. Detta begrepp kommer vi att studera i kapitel ??, och vi kan ta diskussionen ovan som en motivering till att införa detta begrepp.

2.10 Öppna, slutna och kompakta mängder

Öppna och slutna mängder

Definition 2.30. Låt $a \in \mathbb{R}$ och $\varepsilon > 0$. Med en *ε-omgivning* av a menar vi mängden $B(a,\varepsilon) := \{x \in \mathbb{R} \,:\, |x - a| < \varepsilon\}$. Med en *omgivning* av a menar vi en ε-omgivning av a för något $\varepsilon > 0$.

Det gäller förstås att $B(a,\varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Motsvarande mängder kan definieras i högre dimension, och då kallas de ofta för bollar, eftersom det i $\mathbb{R}^3$ svarar mot just en boll. Härav beteckningen B. Detta ger oss även ett nytt sätt att säga att en talföljd är konvergent. Talföljden (a_k) är konvergent med gränsvärde A precis då det för varje $\varepsilon > 0$ gäller att $a_k \in B(A,\varepsilon)$ om k är tillräckligt stort. Elementen i talföljden skall alltså förr eller senare tillhöra varje given boll runt A.

Givet en mängd ska vi nu berätta vad vi menar med inre punkter, yttre punkter och randpunkter, samt öppna och slutna mängder.

Definition 2.31. Låt $E \subset \mathbb{R}$ vara en mängd och a ett reellt tal.

a) Talet a kallas för en *inre punkt* i E om det finns någon omgivning av a som ligger helt i E.

b) Talet a kallas för en *randpunkt* till E om det gäller att varje omgivning till a innehåller någon punkt ur E och någon punkt ur komplementet $\complement E$ till E. Mängden av alla randpunkter till E betecknas ∂E.

c) Talet a kallas för en *yttre punkt* till E om det finns en omgivning kring a som ligger helt i komplementet $\complement E$.

d) En mängd $E \subset \mathbb{R}$ är *öppen* om alla dess punkter är inre punkter i E.

e) En mängd $E \subset \mathbb{R}$ är *sluten* om den innehåller alla sina randpunkter, dvs om $\partial E \subset E$.

Det gäller alltså att en mängd är öppen precis då dess randpunkter inte tillhör mängden och sluten om dess randpunkter tillhör mängden. Vidare visar du i övning 2.46 att en mängd är öppen om och endast om dess komplement är slutet.

Vi har tidigare definierat öppna och slutna intervall. Observera att öppna och slutna intervall verkligen är öppna respektive slutna i ovanstående mening (övning 2.47).

Definition 2.32. Låt $E \subset \mathbb{R}$ och $a \in \mathbb{R}$.

a) Vi säger att a är en *isolerad punkt* om det finns en omgivning $B(a, \varepsilon)$ av a sådan att a är den enda punkten i omgivningen som tillhör E.

b) Vi säger att a är en hopningspunkt till E om varje omgivning av a innehåller någon punkt ur E skild från a.

Vi ger ett par exempel.

Exempel 2.33.

a) Alla punkter i $[0, 1]$ är hopningspunkter till $(0, 1)$.

b) Mängden $E = \{1/n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ har den enda hopningspunkten 0. Alla punkter i E är dock isolerade punkter.

c) Mängden $\mathbb{N}$ saknar hopningspunkter. ∎

Du visar i övning 2.48 att en mängd E är sluten om och endast om den innehåller alla sina hopningspunkter.

Kompakta mängder

Vi har vid intervallinkapslingssatsen arbetat med så kallade kompakta intervall, det vill säga intervall som är slutna och begränsade. Här ska vi ge två definitioner för vad en allmän kompakt mängd är. Detta leder till två kompakthetsbegrepp, och vi ska visa att de i själva verket är samma begrepp för delmänger av de reella talen.

Låt E vara en begränsad delmängd av de reella talen. Om (a_k) är en följd av tal i E, så vet vi enligt Bolzano–Weierstraß att det finns en konvergent delföljd till (a_k). Gränsvärdet av denna delföljd är alltså ett reellt tal, men kan vi veta om gränsvärdet är en punkt i E? Svaret är att det beror på mängden E. Mängder som har egenskapen att gränsvärdet ligger i mängden kallas för följdkompakta. Vi ger en definition.

DEFINITION 2.34. (FÖLJDKOMPAKT MÄNGD) En mängd $E \subset \mathbb{R}$ kallas för *följdkompakt* om varje följd (a_k) med $a_k \in E$ har en konvergent delföljd med ett gränsvärde som ligger i E.

Vi ska snart definiera vad som menas med att en mängd är *kompakt*. För att kunna göra detta måste vi först införa begreppet övertäckning.

DEFINITION 2.35. Låt $E \subset \mathbb{R}$. En *övertäckning* av E är en familj av mängder vars union är en mängd som innehåller E som delmängd. Vi säger då också att mängderna i familjen *täcker* E. Om alla mängder i övertäckningen är öppna, talar vi om en *öppen övertäckning* av E.

EXEMPEL 2.36. Det gäller att familjen $\mathcal{U}$ av öppna intervall,

$$\mathcal{U} = \Big\{(-1/2, 1/2)\,,\ (1/4, 3/4)\,,\ (1/2, 3/2)\Big\}$$

utgör en öppen övertäckning av både $(0,1)$ och $[0,1]$.

Familjen som utgör en övertäckning behöver inte vara ändlig. Den kan vara uppräknelig, dvs mängderna kan indexeras med $\mathbb{N}$, eller så kan den vara mäktigare än så.

EXEMPEL 2.37. Vi låter $\mathcal{U}$ vara familjen av öppna intervall som ges av

$$\mathcal{U} = \left\{\left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n-1}}\right)\ :\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

Det gäller då att varje $x \in (0,1)$ tillhör något av intervallen i $\mathcal{U}$, så $\mathcal{U}$ är en öppen övertäckning av $(0,1)$. Men om vi tar bort ett intervall, vilket som helst så upphör mängden att vara en öppen övertäckning. Det gäller nämligen att talen 2^{-n} för $n \in \mathbb{N}$ endast tillhör ett av intervallen. ∎

EXEMPEL 2.38. Vi låter $\mathcal{U}$ vara familjen av öppna intervall som ges av

$$\mathcal{U} = \Big\{(n-1, n+1)\ :\ n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Då gäller det att $\mathcal{U}$ täcker $[1, +\infty)$, men åter gäller det att om vi tar bort ett intervall, vilket som helst, så kommer återstoden inte att täcka $[1, +\infty)$. Det gäller nämligen att varje naturligt tal n endast tillhör ett av intervallen.

DEFINITION 2.39. (KOMPAKT MÄNGD) Låt E vara en delmängd av de reella talen. Då kallas E för *kompakt* om varje familj av öppna mängder som täcker E har en ändlig delfamilj som också täcker E.

De två föregående exemplen visar att varken intervallet $(0,1)$ eller $[1, +\infty)$ är kompakta mängder. Det visar sig (se sats 2.41 nedan) att anledningen till detta är att varje kompakt mängd måste vara sluten och begränsad. Som förberedelse för att visa sats 2.41 visar vi följande lemma.

LEMMA 2.40. *Varje kompakt mängd är begränsad.*

Bevis Antag att mängden E är kompakt. Då är familjen

$$\Big\{(-n,n) \ : \ n \in \mathbb{N}\Big\}$$

av öppna intervall en öppen övertäckning av $\mathbb{R}$ och därmed också av E. Det finns därmed en ändlig delövertäckning av E, vilket denna gång medför att E täcks av *ett* intervall $(-n,n)$ för något $n \in \mathbb{N}$. Alltså är E begränsad. ∎

Vi ska härnäst visa att de två kompakthetsbegreppen i själva verket är samma begrepp, och att vi därför kan tala om endast kompakthet utan att precisera om det är följdkompakthet eller kompakthet vi menar. Dessutom visar vi som annonserat det ytterligare villkoret för kompakthet, nämligen slutenhet och begränsning. Dock betonar vi att detta gäller för delmängder av de reella talen. De två kompakthetsbegreppen kan med mycket liknande definitioner införas i andra sammanhang, men de är då inte alltid samma begrepp.

Sats 2.41. *Låt $E \subset \mathbb{R}$. Följande är ekvivalent:*

a) *E är sluten och begränsad.*

b) *E är kompakt.*

c) *E är följdkompakt.*

Anmärkning Ekvivalensen mellan de två första påståendena kallas för Heine[15]–Borels[16] sats.

Bevis a) $\Longrightarrow$ b): Antag att E är sluten och begränsad. Då är den en delmängd av ett slutet intervall $[a,b]$ för några $a,b \in \mathbb{R}$. Låt vidare $\mathcal{U}$ vara en öppen övertäckning av E. Om det råkar vara så att E är ändlig kan vi för varje element i E välja ut precis en öppen mängd från $\mathcal{U}$ som täcker just den punkten, och då har vi vår ändliga övertäckning. Antag därför att E innehåller oändligt många punkter.

Vi skall nu göra ett motsägelsebevis, och antar därför att det inte finns någon ändlig delfamilj av de öppna mängderna i $\mathcal{U}$ som täcker E. Vi använder intervallinkapslingssatsen. Först delar vi intervallet $[a,b]$ mitt itu och betraktar de delmängder av E som ligger i $[a,(a+b)/2]$ respektive $[(a+b)/2,b]$. För minst en av dessa delmängder kommer det gälla att den inte kan täckas av ändligt många öppna mängder från $\mathcal{U}$, ty om bägge kunde täckas med ändligt många skulle även E kunna täckas med ändligt många.

Vi fortsätter att dela det intervallet upprepade gånger och får som vid tidigare argument en följd av slutna intervall $\{I_k\}$ sådana att $I_{k+1} \subset I_k$

[15] Eduard Heine, 1821–1881, tysk matematiker

[16] Émile Borel, 1871–1956, fransk matematiker

och sådant att det för varje I_k gäller att de punkter som ligger i både E och I_k inte kan täckas med ett ändligt antal öppna mängder från $\mathcal{U}$. Intervallinkapslingssatsen ger nu att det finns precis ett reellt tal ξ som tillhör alla I_k, eftersom längden av dessa intervall går mot noll. Detta tal ξ är en hopningspunkt för E, och eftersom E är sluten så gäller det att $\xi \in E$. Men eftersom $\mathcal{U}$ är en öppen övertäckning av E finns det en öppen mängd $U \in \mathcal{U}$ sådan att $\xi \in U$. Men detta U kommer att innehålla I_k från och med något k, vilket motsäger att dessa I_k inte kan täckas av ett ändligt antal öppna mängder från $\mathcal{U}$. Alltså måste det finnas en ändlig delfamilj av $\mathcal{U}$ som täcker E.

b) $\Longrightarrow$ c): Vi skall visa att varje kompakt mängd är följdkompakt. Vi antar därför att E är kompakt och att (a_k) är en följd i E. Vi är klara om vi lyckas visa att (a_k) har en konvergent delföljd med gränsvärde som ligger i E.

Eftersom E är begränsad enligt lemma 2.40, har (a_k) en konvergent delföljd (a_{n_k}) enligt Bolzano–Weierstraß sats (sats 2.21). Låt A beteckna delföljdens gränsvärde. Vi vill visa att $A \in E$.

Om A inte ligger i E, så utgör intervallen

$$(-\infty, A - 1/m) \qquad \text{och} \qquad (A + 1/m, +\infty)\,, \qquad m \in \mathbb{N}$$

en öppen övertäckning av E, ty de täcker över alla reella tal förutom A. Då finns det en ändlig delövertäckning av E bestående av intervall av typen ovan. Härav följer att det finns ett $m \in \mathbb{N}$ sådant att det slutna intervallet $[A - 1/m, A + 1/m]$ inte innehåller något element i E. Men detta ger en motsägelse, ty $\lim a_{n_k} = A$, så det måste finnas ett N så att $a_{n_N} \in [A - 1/m, A + 1/m]$, och eftersom $a_k \in E$ är detta omöjligt. Alltså måste A ligga i E, vilket slutför beviset för att E är följdkompakt.

c) $\Longrightarrow$ a): Vi gör ännu ett motsägelsebevis. Antag först att E inte är begränsad. Då finns det för varje $k \in \mathbb{N}$ ett a_k sådant att $|a_k| \geq k$. Varje delföljd till (a_k) är förstås obegränsad och alltså divergent, dvs E är inte följdkompakt. Antag i stället att E inte är sluten. Då finns en punkt a som tillhör randen till E men inte E. För varje $k \in \mathbb{N}$ finns tal a_k som tillhör E och vars avstånd till a är mindre än $1/k$. Det innebär dock att varje delföljd till (a_k) kommer att konvergera mot a, som inte tillhör E. Alltså är E ej följdkompakt. ∎

2.11 Problem

L 2.1

a) Vilket är det 99:e talet i följden 1, −1, 1, −1, …?

b) Vilket tal står på plats 10 i följden 2, 3, 5, 7, 11, …?

c) Vilket är nästa tal i följden 1, 11, 21, 1211, …?

T 2.2 Visa att det för naturliga tal n gäller att

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Anmärkning Om vi jämför resultatet med det i exempel 2.3, erhåller vi det vackra resultatet $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$. Kan du visa det på något annat sätt?

2.3 Visa att det för varje $n \geq 2$ gäller att

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

2.4 (Bernoullis olikhet) Visa att det för $n \in \mathbb{N}$ och $x > -1$ gäller att $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ med likhet endast om $x = 0$.

Anmärkning I problem **??** visar du en mer allmän version av Bernoullis olikhet med hjälp av differentialkalkyl.

2.5 En trappa har 7 steg. Du går upp för den genom att antingen ta ett eller två steg åt gången. På hur många olika sätt kan detta ske? Kan du generalisera till en trappa med n steg?

S 2.6 Skriv summan $n \cdot 1 + (n-1) \cdot 2 + \cdots + 2 \cdot (n-1) + 1 \cdot n$ med hjälp av en summationssymbol[17], och beräkna den.

L 2.7 Vi har sett att $1 + 2 + 3 + \cdots + n = n(n+1)/2$. Låt a och d vara godtyckliga tal. Visa att det för $n \in \mathbb{N}$ gäller att

$$(a + d) + (a + 2d) + \cdots + (a + nd) = \frac{(a + d) + (a + nd)}{2} \times n.$$

Anmärkning Summan i vänsterledet kallas för en *aritmetisk summa*, och du bevisar att en sådan summa blir det aritmetiska medelvärdet av första och sista termen, multiplicerat med antalet termer.

S 2.8 Beräkna summan $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 99$.

S 2.9 Beräkna summorna

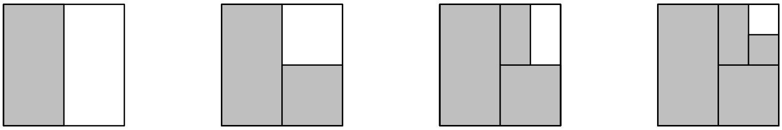
a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} (4 + 3k)$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} (4 - 3k)$ c) $\displaystyle\sum_{k=10}^{100} (100 - 10k)$

L 2.10 Bestäm ett uttryck för summan

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}.$$

[17] Med detta menar vi att summan $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ skrivs som $\sum_{k=1}^{n} a_k$, och det är $\sum$ som kallas för summationssymbolen.

Det kan vara belysande att betrakta figur 2.3 för att få en idé om vad resultatet borde bli.



(a) (b) (c) (d)

FIGUR 2.3

T 2.11 Låt x vara ett reellt tal skilt ifrån 1. Visa att

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Gäller formeln även om $x \in \mathbb{C}$?

S 2.12 Beräkna summorna

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} \left(\frac{2}{3}\right)^k$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} 5\left(-\frac{3}{2}\right)^k$ c) $\displaystyle\sum_{k=10}^{100} \left(\frac{1}{10}\right)^k$

Anmärkning Summorna ovan kallas geometriska eftersom varje term ges som det geometriska medelvärdet av föregående och nästkommande term. Ett annat sätt att karakterisera dessa summor är satt observera att kvoten av varje para av på varandra följande termer är konstant. Resultatet av en geometrisk summa kan sammanfattas med

$$\text{första termen}\frac{1 - \text{kvoten}^{\text{antalet termer}}}{1 - \text{kvoten}}.$$

2.13 Låt $n \in \mathbb{N}$. Med *binomialkoefficienten* $\binom{n}{k}$, menas den koefficient som står framför x^k då produkten $(1 + x)^n$ utvecklas,

$$(1 + x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^n.$$

Talet $\binom{n}{k}$ läses ”n över k”.

a) Kontrollera att $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ och att $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ för alla $n \geq 1$.

b) Visa att det gäller att $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ för $0 \leq k \leq n$.

c) Visa Pascals[18] identitet, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ för $0 \leq k \leq n$.

[18] Blaise Pascal, 1623–1662, fransk matematiker, fysiker och filosof

d) Vi låter $0! = 1$ och definierar n-fakultet, $n!$ som produkten av talen från 1 till n, $n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$. Visa att

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Anmärkning Med hjälp av Pascals identitet kan vi rita Pascals triangel (figur 2.4), som kan användas för att bestämma binomialkoefficienterna. Om vi bortser från ettorna så erhålls varje tal i triangeln som summan av de två tal som finns närmast ovanför. Till exempel utläser vi från den nedersta raden att $(1+x)^6 = 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6$. I praktiken är denna metod endast lämplig för små n.

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \; \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \; \binom{2}{1} \; \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \; \binom{3}{1} \; \binom{3}{2} \; \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \; \binom{4}{1} \; \binom{4}{2} \; \binom{4}{3} \; \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \; \binom{5}{1} \; \binom{5}{2} \; \binom{5}{3} \; \binom{5}{4} \; \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} \; \binom{6}{1} \; \binom{6}{2} \; \binom{6}{3} \; \binom{6}{4} \; \binom{6}{5} \; \binom{6}{6}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1
\end{array}$$

FIGUR 2.4

2.14 Visa att det för reella tal a och b, och naturliga tal n gäller att

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

2.15

a) Visa att $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$ då $n \in \mathbb{N}$.

b) Beräkna summan $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$ för $n \in \mathbb{N}$.

T 2.16 Visa att $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$.

T 2.17 Vi uppskattar storleken på binomialkoefficienten $\binom{2n}{n}$.

a) Visa att det för $n \in \mathbb{N}$ gäller att

$$\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)}.$$

b) Visa olikheten

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \le \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} \le \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Anmärkning I själva verket kan man visa att $\sqrt{n}\binom{2n}{n}/4^n$ närmar sig talet $1/\sqrt{\pi}$ då n blir stort, se sats ??.

2.18 Visa att en talföljd inte kan ha mer än ett gränsvärde.

T 2.19 Visa att $\lim k^{1/k} = 1$.

T 2.20 Visa att om $a_k \ge a$ för alla $k \in \mathbb{N}$ och $\lim a_k = A$ så är $A \ge a$. Måste det gälla att $A > a$ om $a_k > a$ för alla $k \in \mathbb{N}$?

T 2.21 Vi definierar talföljden (a_k) via

$$a_k = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2}.$$

Visa att (a_k) är växande och att $a_k \le 2$. Det följer att $\lim a_k$ existerar.

S 2.22 Visa att man kan ge mening åt uttrycket

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$$

genom att studera talföljden (a_k) som definieras genom $a_1 = 0$ och $a_{k+1} = \sqrt{2+a_k}$ för $k \ge 1$. Vad blir $\lim a_k$?

S 2.23 Bestäm gränsvärdet av talföljden $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$

T 2.24 Visa att det för varje $k \in \mathbb{N}$ gäller att

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e < \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}.$$

T 2.25 Visa att det för $k \in \mathbb{N}$ gäller att $\left(\frac{k+1}{e}\right)^k < k! \le ek\left(\frac{k}{e}\right)^k$.

S 2.26 Beräkna $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{x^k}{1+x^k}$ för de $x \in \mathbb{R}$ som gränsvärdet existerar.

L 2.27 Bestäm $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+2+2^2+\cdots+2^n\right)^{1/n}$.

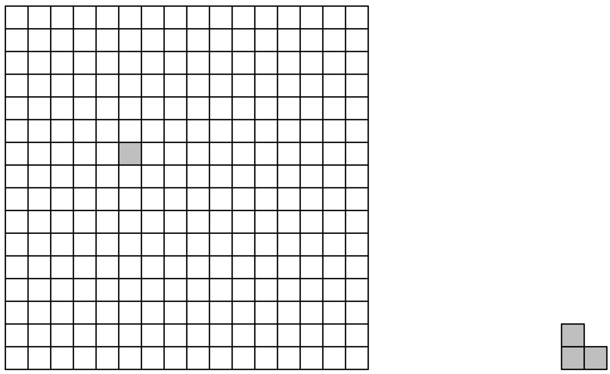
2.28 Visa att produkten av n på varandra följande positiva heltal är delbar med $n!$.

2.29 Visa att varje belopp (hela kronor) större än 3 kronor kan betalas med hjälp av endast tvåkronor och femkronor.

S 2.30 I planet ritas n linjer på ett sådant sätt att inget par av linjer är parallella och så att tre linjer aldrig skär varandra i en punkt. Hur många områden delar linjerna in planet i?

2.31 Kan områdena i planet i föregående uppgift målas med två färger, på sådant vis att varje par av områden som är grannar får olika färg?

2.32 På 16×16-brädet i figur 2.5(a) har vi tagit bort en ruta. Kan de resterande rutorna täckas med den typ av bitar som visas i figur 2.5(b)? Det är tillåtet att rotera bitarna innan de placeras.



(a) (b)

FIGUR 2.5

T 2.33 Antag att $x_1 = 1$ och att $x_{k+1} = x_k + 1/(x_k)^2$ för $k \geq 1$. Visa att talföljden (x_k) är obegränsad.

2.34 Visa att

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{200} = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \cdots + \frac{1}{200}.$$

S 2.35 Beräkna $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$.

2.36 Visa att (a_k) i 2.21 i själva verket är uppåt begränsad av $7/4$.

2.37 Visa att det för varje $n \in \mathbb{N}$ gäller att

$$(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)^{1/2} \geq (1^3 + 2^3 + \cdots + n^3)^{1/3}.$$

T 2.38 För talföljden (a_k) gäller $\lim k(a_{k+1} - a_k) = 1$. Existerar $\lim a_k$?

2.39 För följden (a_k) gäller $\lim(a_{k+1} - a_k) = A$. Visa att $\lim a_k/k = A$.

2.40 Ge exempel på en divergent talföljd (a_k) sådan att det för varje $m \in \mathbb{N}$ gäller att $\lim_{k\to+\infty}(a_{k+m} - a_k) = 0$. Motsäger inte detta att varje Cauchy-följd är konvergent?

L 2.41 Visa Stolz[19]–Cesàros[20] sats, som förkunnar att

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}-a_k}{b_{k+1}-b_k},$$

givet att gränsvärdet i högerledet existerar, och att följden (b_k) växer strängt monotont mot $+\infty$.

2.42 Bestäm $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{1!+2!+\cdots+k!}{k!}$.

2.43 Antag att $0 < x_1 < 1$ och att $x_{k+1} = x_k(1-x_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Visa att $\lim kx_k = 1$.

S 2.44 Heltalsföljderna (q_k), (r_k), (s_k) och (t_k) definieras genom

$$(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^k = q_k + r_k\sqrt{2} + s_k\sqrt{3} + t_k\sqrt{6}.$$

Beräkna gränsvärdena

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{r_k}{q_k}, \quad \lim_{k\to+\infty} \frac{s_k}{q_k}, \quad \text{och} \quad \lim_{k\to+\infty} \frac{t_k}{q_k}.$$

2.45 Låt (a_m) vara en reell talföljd sådan att

$$a_m \le a_{m+n} \le a_m + a_n$$

för alla naturliga tal m och n. Visa att talföljden (a_m/m) är konvergent.

L 2.46 Det gäller att $E \subset \mathbb{R}$ är öppen om och endast om $\complement E$ är sluten.

2.47 Visa att det öppna intervallet $(0,1)$ verkligen är en öppen mängd, och att det slutna intervallet $[0,1]$ är en sluten mängd. Verifiera även att intervallen $(0,1]$ och $[0,1)$ varken är öppna eller slutna.

2.48 Visa att en mängd $E \subset \mathbb{R}$ är sluten om och endast om den innehåller alla sina hopningspunkter.

---

19 Otto Stolz, 1842–1905, österrikisk matematiker

20 Ernesto Cesàro, 1859–1906, italiensk matematiker

3

Serier

3.1 Definition och räkneregler

Du visade i övning 2.10 att $1/2 + 1/4 + \cdots + 1/2^n = 1 - 1/2^n$. Låter vi n gå mot oändligheten finner vi att

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1.$$

Det är därför naturligt att låta

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1.$$

Å andra sidan gäller det att $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$, och eftersom gränsvärdet $\lim_{n\to+\infty}(2^n - 1)$ inte existerar så tycks det vara olämpligt att tilldela summan

$$1+2+4+\cdots+2^{n-1}+\cdots$$

något värde. Vi har just sett två exempel på oändliga summor, en som vi kommer att kalla konvergent eftersom vi kunde tilldela den ett värde, och en som vi kommer att kalla divergent eftersom vi inte kunde det. I det här kapitlet skall vi diskutera olika metoder att avgöra om sådana summor är konvergenta eller divergenta. För att göra detta behöver vi förstås definiera precis vad vi menar med dessa begrepp.

Definition 3.1. Antag att (a_k) är en talföljd. *Den oändliga summan* $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ sägs vara *konvergent* om gränsvärdet $\lim_{n\to+\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ existerar, och vi säger då att *seriens värde* eller *seriens summa* är just detta gränsvärde. Om gränsvärdet inte existerar så säger vi att den oändliga summan $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ är *divergent*. För varje $n \in \mathbb{N}$ kallar vi $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ för en *partialsumma* eller *delsumma* till serien.

Ordet serie, som förekommer ovan, är egentligen bara ett annat ord för följd. Vi kan därför lika gärna kalla följden (a_k) för en serie. Emellertid är det är brukligt att använda ordet serie när vi är intresserade av den oändliga summan

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots.$$

Något oegentligt talar man då vanligtvis om *serien* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, när man menar summan av serien (a_k). Vi kommer framöver att följa detta bruk.

Ibland vill man starta summationen på något annat tal än 1. Frågan om konvergens/divergens för serier beror inte på hur de första termerna uppför sig, utan endast hur a_k beter sig för stora värden på k. Vi kommer därför att använda beteckningen $\sum a_k$ för att beteckna serien med termer a_k, där den undre gränsen är något fixt heltal (tänk $k = 1$) och den övre gränsen är $+\infty$.

Sats 3.2. (Summering är en linjär operation) *Antag att λ är ett tal och att serierna $\sum a_k$ och $\sum b_k$ är konvergenta. Då konvergerar även serierna $\sum \lambda a_k$ och $\sum (a_k + b_k)$, och dessutom gäller det att*

$$\sum \lambda a_k = \lambda \sum a_k, \quad \textit{och} \quad \sum (a_k + b_k) = \sum a_k + \sum b_k.$$

Bevis Vi skriver $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ och $t_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. Förutsättningarna säger att $s_n \to s$ och $t_n \to t$ för några tal s och t då $n \to +\infty$. Därför gäller det enligt räknereglerna för talföljder, 2.9, att

$$\lambda a_1 + \lambda a_2 + \cdots + \lambda a_n = \lambda s_n \to \lambda s, \quad \text{och}$$
$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) = s_n + t_n \to s + t$$

då $n \to +\infty$. Detta visar både konvergensen och formlerna. ∎

Geometriska serier

Vi såg i problem 2.11 att det för $z \neq 1$ gäller att

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Om $|z| < 1$ så existerar gränsvärdet $\lim_{n\to+\infty} z^{n+1} = 0$. Om $|z| \geq 1$ så existerar inte gränsvärdet. Alltså gäller det att

$$\sum_{k=0}^{+\infty} z^k = \frac{1}{1 - z}, \quad |z| < 1.$$

Om $|z| \geq 1$ tilldelar vi inte summan något värde alls.

3.2 Konvergenstest för serier

Sats 3.3. *Om* $\sum a_k$ *är konvergent så gäller det att* $\lim a_k = 0$.

Bevis Vi skriver $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Enligt antagande gäller det att $\lim s_n = s$ där s är värdet på serien. Men då är även $\lim s_{n-1} = s$. Eftersom $a_n = (s_n - s_{n-1})$ får vi, enligt räkneregler för gränsvärden, att $\lim a_n = s - s = 0$. ∎

Anmärkning Resultatet används ofta omvänt. Om termerna i en serie inte konvergerar mot 0, så är serien divergent. Det kan dock gälla att termerna konvergerar mot noll, men att serien ändå är divergent. Till exempel gäller det att serien $\sum 1/\sqrt{k}$ är divergent, eftersom den n:te partialsumman uppfyller olikheten

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} = n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

och $\sqrt{n} \to +\infty$ då $n \to +\infty$.

Positiva serier kan jämföras

Exempel 3.4. Antag att $a_k \geq 0$ för alla $k \in \mathbb{N}$. Då är serien $\sum a_k$ konvergent om och endast om följden av partialsummor är begränsad.

Lösning För partialsummeföljden $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ gäller det att $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$. Alltså är (s_n) växande. Påståendet följer nu direkt av satsen om monoton konvergens för talföljder, sats 2.14. ∎

Exempel 3.5. Den harmoniska serien $\sum 1/k$ är divergent.

Vi har redan visat detta i exempel 2.27, men för att utveckla vår arsenal med metoder ger vi två ytterligare bevis.

Lösning Vi visar att följden av partialsummor inte är begränsad. Låt $C > 0$ vara ett godtyckligt tal. Det gäller att

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} + \frac{1}{4} &> 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2},\\
\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} &> 4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2},\\
\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} &> 8 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

och så vidare. För ett godtyckligt heltal $n \geq 2$ uppfyller partialsumman s_{2^n} med 2^n termer därmed olikheten

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) > 1 + \frac{n}{2}.$$

Om $n > 2C$ så gäller det alltså att $s_{2^n} > C$. Alltså kan partialsummorna kan bli godtyckligt stora om n bara väljs tillräckligt stort, vilket betyder att serien $\sum 1/k$ är divergent. ∎

Lösning Vi låter $s_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$ beteckna partialsummorna. Då gäller det att

$$s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}.$$

Här har vi delat upp den $2n$:te partialsumman i termer där vi summerar över udda respektive jämna tal separat, och sedan plockat ut den första termen 1 ur den ena summan. Eftersom $2k - 1 < 2k$ så gäller det att

$$s_{2n} > 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + s_n. \tag{3.1}$$

Om $\sum 1/k$ skulle vara konvergent så skulle det gälla att $\lim s_n = s$ för något s. Men då skulle det även gälla att $s = \lim s_{2n}$. Men gränsövergång bevarar olikheter, så enligt (3.1) skulle det gälla att

$$s = \lim s_{2n} \geq \frac{1}{2} + \lim s_n = \frac{1}{2} + s.$$

Men detta är omöjligt. Alltså är $\sum 1/k$ divergent. ∎

Sats 3.6. (Jämförelsekriterium) *Antag att $0 \leq a_k \leq b_k$ för alla $k \in \mathbb{N}$. Då gäller att:*

a) *Om $\sum b_k$ är konvergent så är $\sum a_k$ också konvergent.*
b) *Om $\sum a_k$ är divergent så är $\sum b_k$ också divergent.*

Bevis Vi skriver $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ och $t_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$.

a) Om $\sum b_k$ är konvergent existerar T så att $t_n \leq T$ för alla $n \in \mathbb{N}$. Men då gäller, för godtyckligt $n \in \mathbb{N}$, att

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_n = t_n \leq T.$$

Partialsummeföljden (s_n) är alltså begränsad, varför serien $\sum a_k$ är konvergent enligt exempel 3.4.

b) Om $\sum a_k$ är divergent så kommer partialsummeföljden (s_n) att vara obegränsad. Eftersom det enligt precis samma räkning som ovan gäller att $t_n \geq s_n$ så följer det att även partialsummeföljden (t_n) är obegränsad. Divergensen av $\sum b_k$ följer nu från exempel 3.4. ▮

Anmärkning Det räcker förstås att olikheterna $0 \leq a_k \leq b_k$ skall gälla för alla $k \geq N$, för något $N \in \mathbb{N}$.

Exempel 3.7. Antag att $p \in \mathbb{R}$ är en konstant. Då gäller det att

$$\sum \frac{1}{k^p} \quad \text{är konvergent} \iff p > 1.$$

Lösning Vi har sett i exempel 3.5 att serien $\sum 1/k$ är divergent. Om $p < 1$ ger jämförelsekriteriet sats 3.6 att $\sum 1/k^p$ är divergent tack vare olikheterna $0 \leq 1/k \leq 1/k^p$.

Antag nu att $p > 1$. Vi gör ungefär som i exempel 3.5. Först observerar vi att termerna i serien är positiva, så det räcker att visa att partialsummorna till serien är uppåt begränsade. Det gäller att

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} &< 2 \times \frac{1}{2^p} = \frac{1}{2^{p-1}} \\ \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} &< 4 \times \frac{1}{4^p} = \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2 \\ &\vdots \\ \frac{1}{(2^n)^p} + \cdots + \frac{1}{(2^n + 2^n - 1)^p} &< 2^n \times \frac{1}{(2^n)^p} = \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n. \end{aligned}$$

Vi använder dessa uppskattningar, samt uppskattar den geometriska summan med motsvarande geometriska serie, och får

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k^p} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2^{p-1})^k} < \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2^{p-1})^k} = \frac{1}{1 - 1/2^{p-1}}.$$

Här har vi använt att kvoten i den geometriska serien är $1/2^{p-1} < 1$. Eftersom högerledet är begränsat, oberoende av n, och eftersom vår serie endast har positiva termer, följer det att samtliga partialsummor är begränsade. ▮

Anmärkning Vi har egentligen inte definierat vad ett positivt heltal upphöjt till ett irrationellt skall betyda. Vi kommer att göra detta senare (se definition ??), och det kommer att vara oberoende av det vi gjort här. Den som vill kan anta att p i exempel 3.7 är ett rationellt tal.

Exempel 3.8. Konvergerar eller divergerar nedanstående serier?

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{8k^3 + 1}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2}{8k^3 - 1}$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{8k^3 - 1}$

Lösning Vi söker i samtliga fall lämpliga serier att jämföra med. För att göra det är det bra att först skaffa sig en känsla för hur stora termerna är då k är stort. I samtliga serier här är termerna en kvot av polynom. Då kommer endast termerna med högst grad att dominera då k är stort.

a) Det gäller att $1/(8k^3+1) \approx 1/(8k^3)$ då k är stort. Vi jämför därför med den konvergenta p-serien $\sum 1/(8k^3)$. I själva verket är

$$0 \le \frac{1}{8k^3+1} \le \frac{1}{8k^3}.$$

Vår serie är konvergent enligt jämförelsekriteriet sats 3.6.

b) Här beter sig termerna ungefär som $k^2/(8k^3) = 1/(8k)$ då k är stort. Eftersom

$$\frac{k^2}{8k^3-1} \ge \frac{k^2}{8k^3} = \frac{1}{8k}$$

och serien $\sum 1/(8k)$ är divergent, så är även vår serie divergent.

c) Denna liknar väldigt mycket serien i a), och vi borde ha konvergens. Tyvärr ställer -1 i nämnaren till det med uppskattningen lite. Vi söker en uppskattning på formen

$$0 \le \frac{1}{8k^3-1} \le \frac{C}{k^3}$$

för någon konstant C. Denna olikhet är för $k \ge 1$ ekvivalent med olikheten $k^3 \le C(8k^3-1)$, vilken, om vi samlar termerna med k^3 på ena sidan, kan skrivas $C \le (8C-1)k^3$. Denna olikhet är uppfylld för alla $k \ge 1$ om $C \ge 1/7$. Speciellt, för $C = 1$, gäller

$$0 \le \frac{1}{8k^3-1} \le \frac{1}{k^3}$$

för alla $k \ge 1$. Vi vet vi att $\sum 1/k^3$ är en konvergent p-serie, och därmed är vår serie också konvergent enligt jämförelsekriteriet. ∎

Som vi såg i exempel 3.8c) så blir det lätt lite opraktiskt att jämföra termer i serier med olikheter. Konvergensfrågan för en positiv serier $\sum a_k$ avgörs genom att studera storleken på a_k för stora k. Då behöver vi inte vara så precisa som vi är då vi räknar med olikheter, utan det räcker ofta att jämföra gränsvärden.

Sats 3.9. (Jämförelsekriterium på gränsvärdesform) *Antag att (a_k) och (b_k) är positiva talföljder, och att $\lim(a_k/b_k) = \kappa > 0$. Då är $\sum a_k$ konvergent om och endast om $\sum b_k$ är konvergent.*

Bevis Om k är tillräckligt stort gäller det att $\kappa/2 \le a_k/b_k \le 3\kappa/2$. Påståendet följer nu direkt av det första jämförelsekriteriet. ∎

EXEMPEL 3.10. Avgör konvergensfrågan för serierna i exempel 3.8 igen, men använd denna gång jämförelsekriteriet på gränsvärdesform.

Lösning Vi kallar termerna i respektive serie för a_k och jämför med lämpliga b_k.

a) Låt $b_k = 1/k^3$. Det gäller då att

$$\lim \frac{a_k}{b_k} = \lim \frac{k^3}{8k^3+1} = \frac{1}{8}.$$

Eftersom $\sum b_k$ är konvergent är även $\sum a_k$ det.

b) Vi väljer nu $b_k = 1/k$. Vi får samma gränsvärde igen,

$$\lim \frac{a_k}{b_k} = \lim \frac{k^3}{8k^3+1} = \frac{1}{8}.$$

Eftersom $\sum b_k$ är divergent är även $\sum a_k$ det.

c) Vi väljer, precis som i a) $b_k = 1/k^3$. Denna gång får vi gränsvärdet

$$\lim \frac{a_k}{b_k} = \lim \frac{k^3}{8k^3-1} = \frac{1}{8}.$$

Vi drar åter slutsatsen att $\sum a_k$ är konvergent. ∎

ABSOLUTKONVERGENS OCH BETINGAD KONVERGENS

Vi skall nu diskutera konvergensfrågan för serier där termerna kan ha olika tecken, eller rentav bestå av komplexa tal. För att hantera fallet med komplexa termer gör vi definitionen att den komplexvärda serien $\sum(x_k + iy_k)$ är konvergent precis då de bägge serierna $\sum x_k$ och $\sum y_k$ är konvergenta. Om så är fallet tilldelar vi serien $\sum(x_k + iy_k)$ värdet $\sum x_k + i\sum y_k$.

SATS 3.11. *Antag att $a_k \in \mathbb{C}$. Om serien $\sum |a_k|$ är konvergent så är även serien $\sum a_k$ konvergent.*

Bevis Vi visar först påståendet i fallet då a_k är reella, och inför två talföljder (b_k) och (c_k),

$$b_k = \begin{cases} a_k, & \text{om } a_k \geq 0, \\ 0, & \text{om } a_k < 0, \end{cases} \qquad \text{och} \qquad c_k = \begin{cases} 0, & \text{om } a_k \geq 0, \\ -a_k, & \text{om } a_k < 0. \end{cases}$$

Då är $a_k = b_k - c_k$ och $0 \leq b_k \leq |a_k|$ och $0 \leq c_k \leq |a_k|$. Om $\sum |a_k|$ är konvergent så följer det därför enligt jämförelsekriteriet att $\sum b_k$ och $\sum c_k$ också är konvergenta. Men då följer det att $\sum(b_k - c_k)$ också är konvergent, dvs att $\sum a_k$ är konvergent.

Antag nu att termerna $a_k = x_k + iy_k \in \mathbb{C}$. Då är $|x_k| \le |a_k|$ och $|y_k| \le |a_k|$. Det följer att de båda *reella* serierna $\sum x_k$ och $\sum y_k$ är absolutkonvergenta, och därmed konvergenta enligt vad vi just visat. Alltså är $\sum a_k = \sum(x_k + iy_k)$ konvergent. ∎

Definition 3.12. Serien $\sum a_k$ sägs vara *absolutkonvergent* precis då $\sum |a_k|$ är konvergent.

I sats 3.11 visade vi alltså att varje absolutkonvergent serie är konvergent. En konvergent serie behöver dock inte vara absolutkonvergent. Vi kommer snart se att serien

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

är konvergent. Vi har redan tidigare visat att serien inte är absolutkonvergent, eftersom den harmoniska serien $1 + 1/2 + 1/3 + \cdots$ är divergent. Vi säger att serien $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1}/k$ är betingat konvergent.

Definition 3.13. En konvergent serie som inte är absolutkonvergent sägs vara *betingat konvergent.*

Kvottestet och rottestet

Sats 3.14. (d'Alemberts[21] kvottest) *Antag att $a_k \in \mathbb{C}$, och att*

$$\lim \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \kappa.$$

a) *Om $\kappa < 1$ så är serien $\sum a_k$ absolutkonvergent.*
b) *Om $\kappa > 1$ så är serien $\sum a_k$ divergent.*
c) *Om $\kappa = 1$ så ger detta test ingen information.*

Bevis

a) Antag att $\kappa < 1$. Vi låter $\varepsilon = (1-\kappa)/2$. Då är $\varepsilon > 0$ och $\kappa + \varepsilon < 1$. Det finns $N \in \mathbb{N}$ så att kvoten $|a_{k+1}/a_k| < \kappa + \varepsilon$ för alla $k \ge N$. För sådana k gäller det alltså att

$$|a_k| \le (\kappa + \varepsilon)|a_{k-1}| \le \cdots \le (\kappa + \varepsilon)^{k-N}|a_N|.$$

Den geometriska serien $\sum(\kappa + \varepsilon)^k$ är konvergent eftersom dess kvot $k + \varepsilon$ uppfyller $0 < \kappa + \varepsilon < 1$. Det första jämförelsekriteriet ger därmed att $\sum |a_k|$ är konvergent.

b) Antag nu att $\kappa > 1$. Låt $\varepsilon = \kappa - 1 > 0$. Det finns N så att $|a_{k+1}/a_k| > \kappa - \varepsilon = 1$ då $k \ge N$. Alltså gäller det att $|a_k| \ge |a_N|$ för alla $k \ge N$.

[21] Jean le Rond d'Alembert, 1717–1783, fransk matematiker och filosof

Det följer att a_k inte konvergerar mot 0, och att $\sum a_k$ därmed måste vara divergent.

c) För den divergenta serien $\sum 1/k$ och den konvergenta serien $\sum 1/k^2$ gäller båda att $\kappa = 1$. ∎

Exempel 3.15. Avgör om nedanstående serier är konvergenta.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2}{2^k}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k!}{k^k}$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2}{k^3+3k+1}$

Lösning Vid betecknar termerna i respektive serie med a_k.

a) Vi undersöker kvoten $|a_{k+1}/a_k|$, och får att

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{(k+1)^2}{2^{k+1}}\frac{2^k}{k^2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{k}+\frac{1}{k^2}\right) \to \frac{1}{2} \quad \text{då } k \to +\infty.$$

Eftersom gränsvärdet är mindre än 1 så konvergerar serien.

b) Kvotkriteriet ger

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}\frac{k^k}{k!} = \frac{1}{(1+1/k)^k} \to \frac{1}{e} \quad \text{då } k \to +\infty.$$

Eftersom $e > 1$ följer det från kvotkriteriet att serien konvergerar.

c) Vi försöker med kvotkriteriet igen. Det gäller nu att

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{(k+1)^2(k^3+3k+1)}{((k+1)^3+3(k+1)+1)k^2} \to 1 \quad \text{då } k \to +\infty,$$

eftersom täljare och nämnare är femtegradspolynom med ledande koefficient 1. Alltså ger kvotkriteriet ingen information. Serien är dock divergent, vilket du enklast visar genom att jämföra den med den divergenta serien $\sum 1/k$. ∎

Exempel 3.16. Visa att $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$ är absolutkonvergent för varje $z \in \mathbb{C}$.

Lösning Om $z = 0$ är resultatet uppenbart, så vi antar att $z \neq 0$ och använder kvottestet. Det gäller att

$$\left|\frac{z^{k+1}/(k+1)!}{z^k/k!}\right| = \frac{|z|}{k+1} \to 0$$

då $k \to +\infty$. Serien $\sum_{k=0}^{+\infty} z^k/k!$ konvergerar enligt kvottestet. ∎

Vi kommer i definition 3.27 att använda just denna serie för att definiera exponentialfunktionen.

Sats 3.17. (Cauchys rottest) *Antag att $a_k \in \mathbb{C}$, och att*

$$\lim |a_k|^{1/k} = \rho.$$

a) *Om $\rho < 1$ så är serien $\sum a_k$ absolutkonvergent.*

b) *Om $\rho > 1$ så är serien $\sum a_k$ divergent.*

c) *Om $\rho = 1$ så ger detta test ingen information.*

Bevis

a) Antag först att $\rho < 1$, och sätt $\varepsilon = (1-\rho)/2$. Då existerar $N \in \mathbb{N}$ så att $|a_k|^{1/k} < \rho + \varepsilon$ om $k \geq N$. Alltså följer det att $|a_k| < (\rho + \varepsilon)^k$ för dessa k. Eftersom $\rho + \varepsilon < 1$ så konvergerar den geometriska serien $\sum (\rho + \varepsilon)^k$. Jämförelsesatsen ger att även $\sum |a_k|$ konvergerar.

b) Antag nu att $\rho > 1$, och sätt $\varepsilon = \rho - 1 > 0$. Det existerar $N \in \mathbb{N}$ så att $|a_k|^{1/k} > \rho - \varepsilon = 1$ om $k \geq N$. Men det innebär precis att $|a_k| > 1$ då $k \geq N$, och att a_k därmed inte konvergerar mot 0, varför serien $\sum a_k$ är divergent.

c) För den divergenta serien $\sum 1/k$ och den konvergenta serien $\sum 1/k^2$ gäller båda att $\rho = 1$. ∎

Exempel 3.18. För vilka reella x är serien $\sum kx^k$ konvergent?

Lösning Vi använder rottestet, och får då $k \to +\infty$ att

$$|kx^k|^{1/k} = k^{1/k}|x| \to |x|.$$

Alltså konvergerar serien $\sum kx^k$ absolut om $|x| < 1$ och är divergent om $|x| > 1$. Om $x = -1$ eller $x = 1$ så kommer termerna inte att konvergera mot 0, varför serien divergerar. Sammanfattningsvis är serien $\sum kx^k$ konvergent precis då $|x| < 1$. ∎

Anmärkning Rottestet är lite mer allmänt än kvottestet, i den mening att om kvottestet fungerar så kommer rottestet också att göra det, se övning ??.

Dedekinds, Leibnizs och Dirichlets tester

Sats 3.19. (Abels[22] partiella summationsformel) *Antag att (a_k) och (b_k) är två talföljder, och sätt $B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ för varje $n \in \mathbb{N}$. Då gäller det att*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) B_k. \tag{3.2}$$

[22] Niels Henrik Abel, 1802–1829, norsk matematiker

Bevis För $n \in \mathbb{N}$ skriver vi $B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. Genom att skriva $b_k = B_k - B_{k-1}$ för $k \geq 2$ skriver vi om partialsumman $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ som

$$a_1 B_1 + a_2(B_2 - B_1) + \cdots + a_n(B_n - B_{n-1}).$$

Sedan samlar vi ihop termerna i högerledet som har samma B_k, och får således

$$(a_1 - a_2)B_1 + (a_2 - a_3)B_2 + \cdots + (a_{n-1} - a_n)B_{n-1} + a_n B_n. \quad \blacksquare$$

Sats 3.20. (Dedekinds test) *Antag att (a_k) och (b_k) är två följder som uppfyller följande:*

a) $\lim a_k = 0$,

b) $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_{k+1} - a_k|$ *är konvergent,*

c) *följden av partialsummor $\sum_{k=1}^{n} b_k$ är begränsad, dvs det finns en konstant C så att $|\sum_{k=1}^{n} b_k| \leq C$ för alla $n \in \mathbb{N}$.*

Då är serien $\sum a_k b_k$ konvergent.

Bevis Vi skriver först om partialsumman med hjälp av Abels partiella summationsformel, (3.2). Enligt antagande finns en konstant C så att $|B_n| \leq C$ för alla n. Dessutom gäller det att $\lim a_n = 0$, så den första termen konvergerar mot 0 då $n \to +\infty$. Vidare gäller det att

$$|(a_{k+1} - a_k)B_k| = |a_{k-1} - a_k| \cdot |B_k| \leq C|a_{k-1} - a_k|,$$

varför serien $\sum(a_{k+1} - a_k)B_k$ är absolutkonvergent, och speciellt konvergent. Det följer att $\sum a_k b_k$ är konvergent. $\blacksquare$

Följande specialfall av Dedekinds test är mycket användbart för att påvisa konvergens hos alternerande serier, dvs serier där varannan term är positiv och varannan negativ.

Sats 3.21. (Leibnizs[23] test) *Antag att (a_k) är en avtagande följd av positiva tal som konvergerar mot* 0*. Då konvergerar serien $\sum(-1)^{k-1} a_k$.*

Bevis Vi låter $b_k = (-1)^{k-1}$ och använder Dedekinds test på (a_k) och (b_k). Partialsummorna $\sum_{k=1}^{n} b_k$ är 1 om n är udda och 0 annars. Speciellt är de begränsade. Enligt antagande gäller $\lim a_k = 0$. Vidare, eftersom a_k antas vara positiva och avtagande så gäller det att

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{k+1} - a_k| = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n+1}).$$

Denna summa är teleskoperande, och det enda som överlever efter förkortningar är $a_1 - a_{n+1}$. Men eftersom $\lim a_{n+1} = 0$ så följer det att

[23] Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716, tysk matematiker

serien $\sum |a_{k+1} - a_k|$ är konvergent. Vi har alltså verifierat att (a_k) och (b_k) uppfyller villkoren i 3.20, varför serien $\sum a_k b_k$ är konvergent. ∎

Med Leibnizs test kommer en enkel feluppskattning.

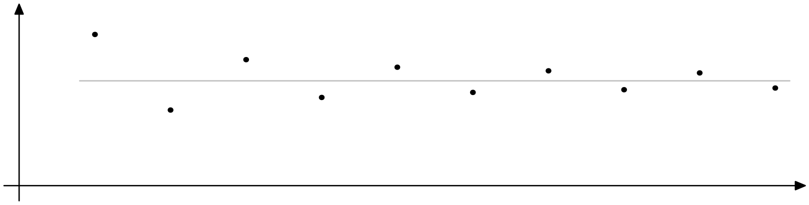
SATS 3.22. *Antag att $s = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots$ är konvergent enligt Leibniz test. Då gäller det att*

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} a_k \leq s \leq \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k-1} a_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Speciellt gäller det för varje $n \in \mathbb{N}$ att

$$\left| s - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_k \right| \leq |a_{n+1}|.$$

I figur 3.1 har vi markerat några partialsummor till serien $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1}/k$, tillsammans med seriens summa $\ln 2$. Vi ser att varannan partialsumma är större än seriens värde, och varannan mindre.



FIGUR 3.1

En följd av vår formulering av Dedekinds test och beviset av Leibniz test är att följande villkor som ofta är enkelt att verifiera.

SATS 3.23. (DIRICHLETS[24] TEST) *Antag att talföljden (a_k) är avtagande, att $a_k > 0$ och att $\lim a_k = 0$. Antag vidare att partialsummorna $\sum_{k=1}^{n} b_k$ är begränsade. Då är serien $\sum a_k b_k$ konvergent.*

Beviset lämnar vi till dig (övning 3.11).

3.3 POTENSSERIER

Vi har tidigare diskuterat den *geometriska serien*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1. \tag{3.3}$$

[24] Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805–1859, tysk matematiker

Den är ett exempel på en potensserie.

Definition 3.24. En serie på formen $\sum a_k x^k$, där a_k ej beror på x, kallas för en *potensserie*. Ofta låter vi summationsindexet börja på 0, och använder som konvention att $a_0 x^0 = a_0$.

Proposition 3.25.

a) *Antag att $w \in \mathbb{R}$, och att serien $\sum a_k w^k$ är konvergent. Då är potensserien $\sum a_k x^k$ absolutkonvergent för alla $|x| < |w|$.*

b) *Antag att $w \in \mathbb{R}$, och att serien $\sum a_k w^k$ är divergent. Då är potensserien $\sum a_k x^k$ divergent för alla $|x| > |w|$.*

Bevis

a) Eftersom $\sum a_k w^k$ är konvergent så konvergerar $a_k w^k$ mot 0. Speciellt följer det att $|a_k w^k|$ är begränsade för varje k. Det finns alltså ett tal C så att $|a_k w^k| \leq C$ för alla k. För x som uppfyller $|x| < |w|$ får vi att $|a_k x^k| = |a_k w^k| \cdot |x/w|^k \leq C|x/w|^k$. Men $\sum C|x/w|^k$ är en konvergent geometrisk serie, så jämförelsekriteriet ger att $\sum |a_k x^k|$ är konvergent.

b) Antag att $\sum a_k w^k$ är divergent och att x uppfyller $|x| > |w|$. Om $\sum a_k x^k$ vore konvergent så skulle, enligt vad vi just visade, även $\sum a_k w^k$ vara det. Alltså är $\sum a_k x^k$ divergent. ∎

Definition 3.26. Vi säger att talet $R \geq 0$ är *konvergensradien* för potensserien $\sum a_k x^k$ om det gäller att $\sum a_k x^k$ konvergerar för alla x med $|x| < R$ och divergerar för alla x med $|x| > R$.

Om potensserien konvergerar för alla $x \in \mathbb{R}$ så säger vi att den har oändlig konvergensradie, och skriver $R = +\infty$.

Anmärkning Det följer ur proposition 3.25 att varje potensserie har en konvergensradie (övning 3.13).

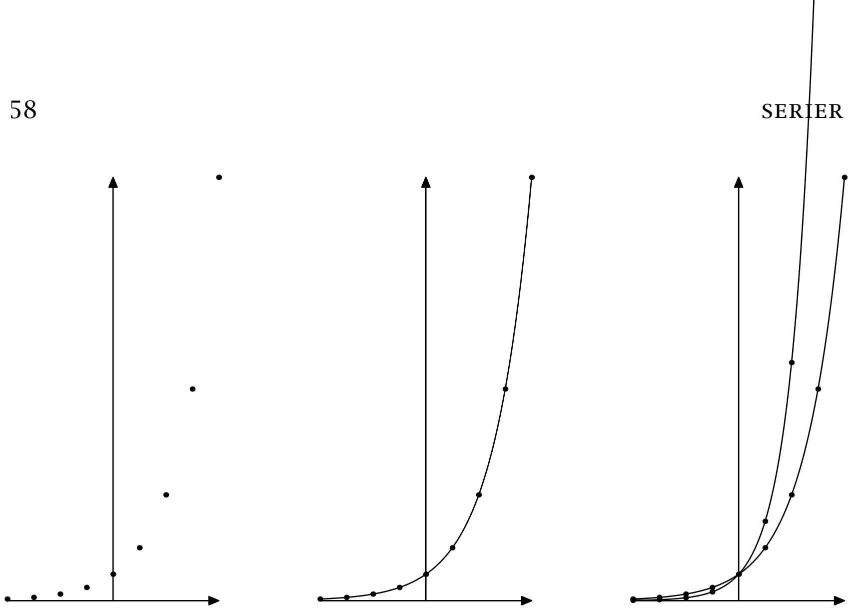
3.4 Exponentialfunktionen

Introduktion

Vi skall här göra en preliminär diskussion av exponentialfunktioner, dvs funktioner på formen $x \mapsto a^x$ för något positivt a. Du är redan bekant med en del räkneregler för sådana, till exempel gäller det att

$$a^0 = 1, \quad a^{x+y} = a^x a^y, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \quad \text{och} \quad (a^x)^y = a^{xy}. \tag{3.4}$$

Vi har dock ännu inte definierat vad a^x betyder för irrationella x.



(a) (b) (c)

FIGUR 3.2

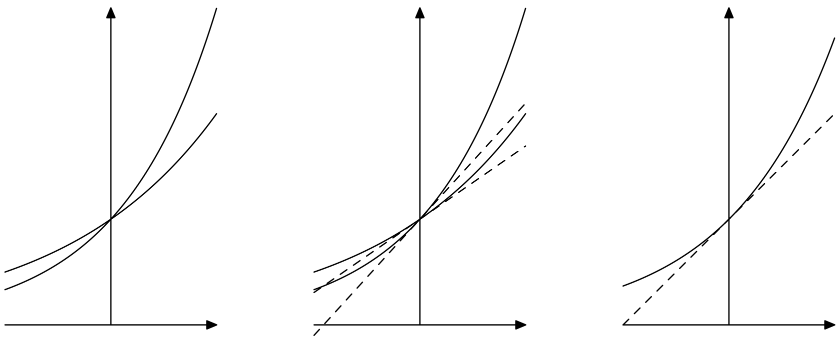
I figur 3.2(a) har vi ritat punkter med koordinater $(k, 2^k)$, $-4 \le k \le 4$, i ett koordinatsystem. I figur 3.2(b) har vi lagt till en slät kurva som ansluter till dessa punkter. I den högra figuren har vi även lagt till motsvarande punkter med koordinater $(k, 3^k)$ och dragit en slät kurva som ansluter till dem. Som synes blir värdena ganska stora, så hela grafen får inte plats på sidan.

De två graferna vi har ritat är i själva verket graferna till funktionerna $x \mapsto 2^x$ och $x \mapsto 3^x$. Vi har tidigare sett hur man kan definiera 2^x då x är rationellt, och skall inte här diskutera hur värdet av 2^x definieras för irrationella x.

Det visar sig att ett specifikt val av bas a är enklare att arbeta med än de andra. Valet hänger ihop med lutningen av exponentialfunktionerna då $x = 0$. Vi kommer att diskutera detta mer utförligt då vi har introducerat begreppet derivata, men till varje punkt på en slät kurva kan man klistra på en tangent, en rät linje som precis som namnet antyder tangerar kurvan i punkten.

Om vi betraktar graferna i koordinatsystemet i figur 3.2(c) ser vi att lutningen för $y = 3^x$ verkar vara större än den för $y = 2^x$ då $x = 0$. Detta syns tydligare i figur 3.3(a), där vi har låtit datorn rita kurvorna $y = 2^x$ och $y = 3^x$ för värden på x mellan -1 och 1. I figur 3.3(b) har vi lagt till de räta linjer (streckade) som tangerar $y = 2^x$ och $y = 3^x$ i $(0, 1)$. Det bör vara tydligt att tangenten som hör till $y = 2^x$ har en riktningskoefficient som är mindre än 1. Riktningskoefficienten till tangenten till $y = 3^x$ är större än 1. Det är inte lika tydligt, men om den hade varit lika med ett så hade den precis landat i x-axeln, som är ritad för x mellan -1 och 1.

Om man betraktar tangenterna till kurvskaran $y = a^x$ i $(0, 1)$ för olika



FIGUR 3.3

värden på a så visar det sig att riktningskoefficienterna är växande i a. Alltså bör det finnas ett a så att kurvan $y = a^x$ har en tangent i $(0, 1)$ med riktningskoefficient 1. Dessutom kommer detta a nödvändigtvis att vara större än 2 och mindre än 3 enligt resonemanget ovan. Det visar sig att detta a är *Eulers tal* som vi har definierat i definition 2.19 och betecknar mer e. Alternativt hade vi kunnat använda resonnemanget ovan för att definiera e.

Vi kommer senare att visa att e är ett irrationellt tal. Här följer början på dess decimalutveckling:

$$e = 2.718281828459045\dots$$

Vi har ritat kurvan $y = e^x$ för x mellan -1 och 1 i figur 3.3(c). Dess tangent i $(0, 1)$ är streckad, och precis som önskat ser vi att den ansluter x-axeln då $x = -1$. Vi kommer först i kapitel ?? att göra en mer ordentlig definition av e^x.

Vi börjar med att fundera på vad vi önskar av en exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, och för att göra det utgår vi ifrån att du känner till begreppet derivata och några grundläggande egenskaper för derivator.

Den allra viktigaste egenskapen för exp är att den skall uppfylla

$$y' = y, \quad y(0) = 1, \tag{3.5}$$

en differentialekvation dyker upp överallt i tillämpningar. Med lite teori för differentialekvationer skulle man kunna visa att (3.5) faktiskt endast har en lösning, och definiera exponentialfunktionen som denna. Eftersom vi inte har teorin för differentialekvationer skall vi inte följa detta spår.

En annan viktig egenskap som exponentialekvationen skall uppfylla är att det för alla $a, b \in \mathbb{R}$ skall gälla att

$$\exp(a + b) = \exp(a)\exp(b), \quad \exp(0) = 1, \tag{3.6}$$

dvs exponentialfunktionen skall omvandla summor till produkter. Med lite teori för reellvärda funktioner skulle man kunna visa att det bara finns en funktion som uppfyller (3.6) om man lägger på villkoret att funktionen skall vara kontinuerlig i 0. Eftersom vi inte har den teorin heller, skall vi inte heller gå denna väg.

Det går faktiskt att göra direkta definitioner av exponentialfunktionen så att de egenskaper vi just önskat blir uppfyllda. Vi har i avsnitt 2.6 sett att talet e kan definieras som gränsvärdet $\lim_{n\to+\infty}(1+1/n)^n$. Givet att vi tänker oss e som specialfallet $x = 1$ i e^x kan man tänka sig att det skulle gå att definiera e^x med ett liknande gränsvärde.

Ett sätt att motivera detta angreppssätt ytterligare är att utgå ifrån differentialekvationen (3.5) ovan och använda en numerisk metod (Eulers stegmetod) för att bestämma en approximativ lösning. Om man gör det landar man i att den approximativa lösningen i punkten x ges av polynomet $(1 + x/n)^n$. En derivering ger

$$\mathrm{D}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1},$$

vilket ju ser lovande ut så när som på en faktor $(1 + x/n)$. Om vi låter $y = (1 + x/n)^n$ blir alltså $y'/y = 1/(1 + x/n)$, och om n blir stort kan man hoppas på att högerledet närmar sig 1. Man kan mycket riktigt visa, med liknande metoder som vi använder för $(1 + 1/n)^n$, att gränsvärdet

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

existerar för alla $x \in \mathbb{R}$, och att resultatet uppfyller både (3.5) och (3.6).

Ett annat sätt att närma sig problemet är att först söka en lösning till (3.5) bland polynomen, dvs att hoppas på en funktion på formen

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n.$$

Men en derivering ger

$$p_n'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1},$$

ett polynom av en grad lägre än p_n, så det kan inte gälla att $p_n' = p_n$. Men vi kan komma ganska nära. Om

$$a_1 = a_0, \quad 2a_2 = a_1, \quad \ldots, \quad na_n = a_{n-1}$$

gäller det att $p_n'(x) - p_n(x) = -a_nx^n$. Om vi dessutom väljer $a_0 = 1$ så att $p_n(0) = 1$ så finner vi snart att $a_k = 1/k!$ för $0 \le k \le n$, så differensen blir $x^n/n!$. För varje fixt x kommer den differensen alltså att konvergera mot 0 då n växer obegränsat. Det kan därför vara befogat att göra definitionen

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}.$$

Detta är ju en potensserie, som vi har studerat, och detta kommer att bli den väg vi går. En fördel med denna definition är att konvergensen av serien är snabb, vilket gör den användbar för att faktiskt beräkna värden av exponentialfunktionen. En annan är att teorin för potensserier är allmän, och vi kan erhålla egenskaper för exponentialfunktionen genom att använda denna teori.

Definition och egenskaper

Efter den diskussion vi just haft gör vi alltså följande definition.

Definition 3.27. Vi definierar *exponentialfunktionen* $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som potensserien

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots$$

Från exempel 3.16 vet vi att serien i högerledet är absolutkonvergent för varje $x \in \mathbb{R}$, och att exponentialfunktionen därmed är väldefinierad. Vidare kommer vi i kapitel ?? att definiera både logaritmer och allmänna potenser a^b (för positiva a och reella b) med hjälp av exponentialfunktionen. Det kommer då till slut att visa sig att $e^x = \exp(x)$, där Eulers tal e som vi sett i (3.7) uppfyller $e = \exp(1)$.

Om vi hävdar att exponentialfunktionen kommer att fungera som e^x så måste den uppfylla motsvarande räkneregler. Två av dem är fundamentala, och de formuleras här separat.

Sats 3.28. *För $x \in \mathbb{R}$ och $y \in \mathbb{R}$ gäller det att*

$$\exp(0) = 1 \quad \textit{och} \quad \exp(x + y) = \exp(x)\exp(y).$$

Du bör notera likheten mellan dessa två räkneregler och de två första räknereglerna i (3.4). Den första behöver nästan inget bevis,

$$\exp(0) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + 0 + \frac{0^2}{2!} + \frac{0^3}{3!} + \cdots + \frac{0^n}{n!}\right) = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1.$$

Att bevisa den andra räkneregeln fullständigt här skulle ta oss för långt in i teorin för absolutkonvergenta serier. Vi nöjer oss därför för tillfället med att troliggöra resultatet och återkommer med ett fullständigt bevis som bygger på derivator i exempel ??.

Om vi rent formellt skriver ut vad produkten $\exp(x)\exp(y)$ betyder så blir det

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right) \times \left(1 + y + \frac{y^2}{2!} + \cdots + \frac{y^n}{n!} + \cdots\right)$$

Vi samlar de termer som sammantaget i x och y har samma totala grad. Konstant term får vi då 1 multipliceras med 1. Grad 1 får vi dels då 1 multipliceras med y och då x multipliceras med 1, och så vidare. Termerna av total grad n blir

$$1 \cdot \frac{y^n}{n!} + x\frac{y^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^2}{2!}\frac{y^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}y + \frac{x^n}{n!} \cdot 1.$$

vilket med hjälp av binomialutveckling kan skrivas som

$$\frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Vi summerar, och finner att $\exp(x)\exp(y)$ tycks svara mot serien

$$1 + (x+y) + \frac{(x+y)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x+y)^n}{n!} + \cdots,$$

det vill säga precis $\exp(x+y)$, enligt definition.

Anmärkning Det som gör att argumentet ovan inte blir fullständigt är tydligen att vi väljer en viss ordning att multiplicera ihop termerna då vi multiplicerar ihop två serier termvis. I allmänhet är det tillåtet att göra detta om de ingående serierna är absolutkonvergenta. Vi har tidigare visat att potensserien som definierar exponentialfunktionen är absolutkonvergent.

Vi samlar några egenskaper för exponentialfunktionen som vi kommer att behöva i fortsättningen.

Sats 3.29. *Om* $x \in \mathbb{R}$ *så är* $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$ *och* $\exp(x) > 0$.

Bevis Om vi låter $y = -x$ i $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ så finner vi att $1 = \exp(0) = \exp(x)\exp(-x)$. Det följer att $\exp(x) \neq 0$ och att vi således kan dela med $\exp(x)$ för att få identiteten vi söker. För $x > 0$ följer det direkt från definitionen att $\exp(x) > 0$. För negativa x följer det att $\exp(x) = 1/\exp(-x) > 0$. ∎

Sats 3.30. *Det gäller att* $\exp(x) \geq 1 + x$ *med likhet precis då* $x = 0$.

Bevis Vi delar in i olika fall. Om $x > 0$ så gäller det att

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots > 1 + x.$$

Om $x = 0$ vet vi att $\exp(0) = 1 = 1 + 0$. Om $-1 < x < 0$ så sätter vi $y = -x > 0$, och vi har då att

$$\exp(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} < \sum_{k=0}^{\infty} y^k = \frac{1}{1-y}.$$

Enligt sats 3.29 är $\exp(-y) = 1/\exp(y)$ varför olikheten ovan ger oss att

$$exp(x) = \exp(-y) = \frac{1}{\exp(y)} > 1 - y = 1 + x.$$

Slutligen, om $x \leq -1$ så gäller det att $\exp(x) > 0$ medan $1 + x \leq 0$, så $\exp(x) > 1 + x$. ∎

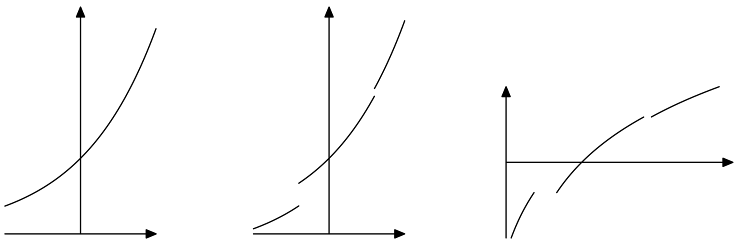
SATS 3.31. *Exponentialfunktionen är strängt växande*[25]*.*

Bevis Vi observerar först, att om $h > 0$ så är $\exp(h) > 1 + h$. Detta följer direkt av definitionen, eftersom vi kastar bort oändligt många positiva termer. Antag nu att $b > a$. Då är

$$\begin{aligned} \exp(b) &= \exp(a + b - a) = \exp(a)\exp(b - a) \\ &> \exp(a)(1 + (b - a)) > \exp(a). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Eftersom exponentialfunktionen är strängt växande har den en invers, och definitionsmängden för denna invers är förstås värdemängden för exponentialfunktionen.

Olikheten $\exp(x) > 1 + x$ för positiva x medför att exponentialfunktionen antar godtyckligt stora värden om x bara är tillräckligt stort. Identiteten $\exp(x)\exp(-x) = 1$ medför å andra sidan att värdena av exponentialfunktionen kan bli godtyckligt nära 0. Dess värdemängd är mycket riktigt halvaxeln $(0, +\infty)$, men det kan vi inte visa med de verktyg vi har just nu.



(a) (b) (c)

FIGUR 3.4

Först när vi har visat satsen om mellanliggande värden (se ??) för kontinuerliga funktioner samt att exponentialfunktionen är kontinuerlig (se ??) kan vi sluta oss till att värdemängden är $(0, +\infty)$, och speciellt att

[25] En funktion f sägs vara *strängt växande* om $b > a$ medför att $f(b) > f(a)$. Den sägs vara *växande* om $b > a$ medför att $f(b) \geq f(a)$. På motsvarande sätt definieras avtagande och strängt avtagande.

grafen till exponentialfunktionen är sammanhängande som i figur 3.4(a). Om den hade sett ut till exempel som i figur 3.4(b) med en massa hopp så hade inversen inte varit definierad på hela $(0, +\infty)$, utan endast på delintervall, se figur 3.4(c).

3.5 Problem

3.1 Antag att vi vet att $\sum_{k=1}^{+\infty} 1/2^k = 1$ och att $\sum_{k=1}^{+\infty} 1/3^k = 1/2$. Visa att $\sum_{k=1}^{+\infty}(3/2^k + 2/3^k) = 4$.

3.2 Verifiera att $\sum_{k=1}^{+\infty} 1/2^k = 1$ och att $\sum_{k=1}^{+\infty} 1/3^k = 1/2$, som det påstods i övning 3.1.

L 3.3 Antag att det finns något tal N så att $a_k = b_k$ om $k \geq N$. Visa att $\sum a_k$ är konvergent om och endast om $\sum b_k$ är konvergent.

S 3.4 Avgör om följande serier är konvegenta eller divergenta.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2+1}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{4k^2-1}$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2-1}$

3.5 (Triangelolikheten) Antag att $\sum |a_k|$ är konvergent. Visa att

$$\left|\sum a_k\right| \leq \sum |a_k|.$$

S 3.6 Använd Abels partiella summationsformel, sats 3.19, för att beräkna

a) $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$ b) $1 + 4x + 9x^2 + \cdots + n^2x^{n-1}$.

S 3.7 För vilka p är $\displaystyle\sum \frac{(-1)^k}{k^p}$ konvergent? Absolutkonvergent?

3.8 Bevisa sats 3.22.

S 3.9 Ge en uppskattning på hur stort felet blir om vi uppskattar $\ln 2$ med $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4$.

T 3.10 Visa att $\sum a_k^2$ är konvergent om $\sum a_k$ är absolutkonvergent. Gäller samma påstående om $\sum a_k$ är betingat konvergent?

3.11 Bevisa sats 3.23.

T 3.12 Visa att $\sum b_k/k$ är konvergent om $\sum b_k$ är det.

T 3.13 Visa att varje potensserie har en konvergensradie, till exempel genom att använda proposition 3.25.

L 3.14 Vi återvänder till Eulers tal $e = \lim(1 + 1/n)^n$. Målet med denna uppgift är att visa att $e = \exp(1)$, dvs att

$$e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}. \tag{3.7}$$

Vi definierar för ändamålet följderna $a_n = (1+1/n)^n$ och $s_n = \sum_{k=0}^{n} 1/k!$.

a) Visa, genom att utveckla a_n, att $a_n \leq s_n$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

b) Visa att $s_k \leq e$ för alla $k \in \mathbb{N}$.

c) Visa att $\lim s_n = e$, dvs att (3.7) är sann.

L 3.15 Målet med denna uppgift är att visa att e är irrationellt. Vi låter s_n stå för samma partialsumma som i föregående uppgift.

a) Visa att det för $n \in \mathbb{N}$ gäller att $0 < e - s_n < \dfrac{1}{n \cdot n!}$.

b) Använd uppskattningen för att visa att talet e är irrationellt.

3.16 Visa att den geometriska serien $\sum x^k$ har konvergensradie 1.

3.17 Potensserien $\sum kx^k$ från exempel 3.18 har konvergensradie 1.

3.18 Potsensserien $\sum x^k/k!$ från exempel 3.16 har oändlig konvergensradie, och $\sum k!x^k$ har konvergensradie $R = 0$. Det senare påståendet ombeds du visa med hjälp av kvottestet.

L 3.19 Låt $n \geq 0$ vara ett heltal. Om $|x| < 1$ så är

$$\left|\exp(x) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)\right| \leq \frac{1}{(n+1)!}\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}.$$

Liknande uppskattningar görs i kapitel ?? om Taylorutvecklingar.

S 3.20 Avgör, för var och en av serierna nedan, om den är konvergent eller divergent.

a) $\sum \dfrac{k^4}{2^k}$	b) $\sum \dfrac{2^k}{k!}$	c) $\sum \dfrac{k}{k^2+2}$
d) $\sum \dfrac{2^k k!}{k^k}$	e) $\sum \dfrac{3^k k!}{k^k}$	f) $\sum \dfrac{k!}{(2^k)^3}$
g) $\sum \dfrac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$	h) $\sum \dfrac{1}{k\sqrt{k+1}}$	i) $\sum \left(\dfrac{1}{\sqrt{k}} - \dfrac{1}{k}\right)$
j) $\sum (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$	k) $\sum \dfrac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k}$	l) $\sum \dfrac{1}{k^{1+1/k}}$
m) $\sum 2^k e^{-k}$	n) $\sum 3^k e^{-k}$	o) $\sum \dfrac{(k!)^2}{(2k)!}$

S 3.21 Beräkna, för varje $n \in \mathbb{N}$, värdet av serien

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)\cdots(k+n)}.$$

S 3.22 I en geometrisk serie, vars summa är $16/3$, är de tre första termerna rötter till $x^3 - ax^2 + ax - 1 = 0$. Bestäm a.

T 3.23 Talföljden (a_k) definieras på följande vis:

$$-1 < a_0 < 1, \qquad \text{och} \qquad a_k = (a_{k-1})^2, \quad k \geq 1.$$

Konvergerar serien $\sum a_k$?

S 3.24 För vilka reella x konvergerar serierna?

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{1+1/k}} x^k$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1+x^{2k}}$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) x^k$ d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \left(x - \frac{1}{k}\right)^k$

S 3.25 Ge ett exempel på en serie där konvergensen kan avgöras med rotkriteriet men inte med kvotkriteriet.

S 3.26 För vilka positiva tal a och b konvergerar serien

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1+a)(1+2a)(1+3a)\cdots(1+ka)}{(1+b)(1+2b)(1+3b)\cdots(1+kb)}?$$

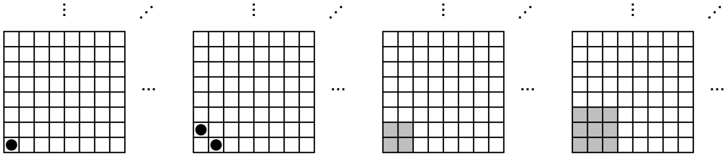
3.27 Antag att $a_k \to a$ och definiera x_k som

$$x_k = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

a) Visa att $x_k \to a$.

b) Visa att x_k är monoton, givet att a_k är det.

3.28 Du spelar ett spel på ett oändligt stort rutnät. Spelet börjar med att det ligger en bricka i det nedre vänstra hörnet (figur 3.5(a)). I varje drag tillåts du att ta bort en bricka samtidigt som du lägger till två nya brickor, en i rutan till höger om den borttagna brickan och en i rutan ovanför. Efter det första draget ser det alltså ut som i figur 3.5(b). Går det att spela så att 2×2-kvadraten i nedre hörnet till vänster (figur 3.5(c)) töms på brickor? Samma fråga för 3×3-kvadraten (figur 3.5(d)).



(a) (b) (c) (d)

FIGUR 3.5

S 3.29 Konvergerar serien $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^{1/3} + (-1)^k}$?

3.30 Visa att $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} = 2.$

3.31 Att avgöra konvergensfrågan för serier kan vara mycket svårt. Det är till exempel okänt om serien

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3 \sin^2 k}$$

är konvergent. Svårigheten ligger i att $\sin^2 k$ blir litet om k är nära en heltalsmultipel av π, så termerna kanske inte är tillräckligt små (de är positiva, så det är verkligen dess storlek som avgör konvergensen). Frågan om konvergens kan därmed, något förenklat, översättas till hur väl talet π approximeras av rationella tal. Kanske har du någon bra idé?

Tips, svar och lösningar

1.5 Antag att $a > b$, och ange ett $\varepsilon > 0$ som ger en motsägelse.

1.6

a) Det gäller att $\pm a \leq |a|$, $\pm b \leq |b|$ och alltså $\pm(a+b) \leq |a| + |b|$. Men $|a+b|$ är antingen $a+b$ eller $-(a+b)$.

b) Triangelolikheten ger oss att $|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b| + |b|$, så $|a-b| \geq |a| - |b|$. Genom att byta roll på a och b finner vi att $|a-b| \geq |b| - |a|$. Kombination av dessa olikheter ger den påstådda olikheten.

1.14 161/1980

1.15 Nej

1.18 Multiplicera det föreslagna z^{-1} med z och visa att resultatet blir 1.

2.1 Observera att dessa förklaringar inte alls är allmängiltiga, och du uppmanas att finna andra naturliga mönster.

a) Vartannat tal är 1, vartannat är -1. Eftersom det första talet är 1 så är även det 99:e talet lika med 1.

b) Detta ser ut att vara en uppräkning av primtalen. Det tionde primtalet är 29.

c) Den här är mer långsökt, och detta är menat som ytterligare en varning mot att ange talföljder på detta sätt. Vi börjar med en etta, därför blir nästa tal 11. Där har vi två ettor, så nästa tal blir 21. Här har vi en tvåa och en etta, så nästa tal blir 1211. Härefter har vi nu en etta, en tvåa och två ettor, så nästa tal är 111221.

2.2 Använd induktion.

2.6 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)k = \frac{n(1+n)(2+n)}{6}$

2.7 Vi skriver

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(a+kd) = a\sum_{k=1}^{n} + d\sum_{k=1}^{n} k = an + d\frac{n(n+1)}{2}.$$

Övertyga dig själv om att detta kan omformas till det påstådda uttrycket.

2.8 2500

2.9

a) 15 550 b) −14 750 c) −40 950

2.10 Från figur 2.3 observerar vi att $1/2 = 1 - 1/2$, $1/2 + 1/4 = 1 - 1/4$, $1/2 + 1/4 + 1/8 = 1 - 1/8$ och $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 = 1 - 1/16$. Det torde vara klart att den eftersökta summan blir $1 - 1/2^n$. Bevisa det gärna med induktion. Alternativt skriver vi $1/2 = 1 - 1/2$, $1/4 = 1/2 - 1/4$, $1/8 = 1/4 - 1/8$ och så vidare enda upp till $1/2^n = 1/2^{n-1} - 1/2^n$. Vid additionen får vi en teleskoperande summa, och det enda som blir kvar är $1 - 1/2^n$.

2.11 Kalla summan för s. Förenkla $(1 - x)s$. Alternativt kan du använda induktion. Formeln gäller även för komplexa tal.

2.12

a) $2(1 - (2/3)^{100})$ b) $3((3/2)^{10} - 1)$ c) $\dfrac{1}{9 \cdot 10^9}(1 - (1/10)^{91})$

2.16 Utveckla $(1 + x)^{2n} = (1 + x)^n(1 + x)^n$ och jämför koefficienter framför x^n.

2.17 För uppskattningen kan det vara lämpligt att betrakta kvadraten av $\binom{2n}{n}/4^n$ och sedan använda olikheten $k^2 > k^2 - 1 = (k - 1)(k + 1)$ upprepade gånger, antingen på täljaren eller på nämnaren.

2.19 Använd Bernoullis olikhet (övning 2.4) på $(1 + 1/\sqrt{k})^k$.

2.20 Antag, för att få en motsägelse, att $A < a$. För att visa att svaret på frågan är nej, betrakta ett lämpligt motexempel.

2.21 Visa (med induktion) den starkare olikheten $a_k \le 2 - 1/k$ i stället.

2.22 2

2.23 2

2.24 Visa att följden $k \mapsto (1 + 1/k)^{k+1}$ är avtagande.

2.25 Använd uppskattningen i övning 2.24.

2.26 0 om $|x| < 1$, $1/2$ för $x = 1$ och 1 för $|x| > 1$.

2.27 Den geometriska summan i parenteserna blir

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1.$$

Vi skall alltså beräkna gränsvärdet $\lim(2^n - 1)^{1/n}$, vilket vi gör med instängning. Å ena sidan är $(2^n - 1)^{1/n} \le (2^n)^{1/n} = 2$. Å andra sidan gäller det att

$$(2^n - 1)^{1/n} = (2^{n-1} + 2^{n-1} - 1)^{1/n} \ge (2^{n-1})^{1/n} = 2 \cdot 2^{-1/n}.$$

Eftersom $2^{-1/n} \to 1$ då $n \to +\infty$ följer att det sökta gränsvärdet är 2.

2.30 $1 + n(n+1)/2$

2.33 Låt $a_k = k^p$ för något lämpligt $p > 0$ och visa att $x_k \geq a_k$ med induktion.

2.35 9

2.38 Skriv om och jämför med $1 + 1/2 + \cdots + 1/k$. $\lim a_k$ existerar ej.

2.41 Låt $\varepsilon > 0$ vara givet, och antag att $\lim(a_{k+1} - a_k)/(b_{k+1} - b_k) = \ell$. Då finns speciellt $N \in \mathbb{N}$ så att

$$k \geq N \implies \ell - \varepsilon < \frac{a_{k+1} - a_k}{b_{k+1} - b_k} < \ell + \varepsilon$$

Rent geometriskt betyder det precis att alla punkter (b_k, a_k) för $k \geq N$ måste ligga mellan de räta linjerna som skär varandra i (b_N, a_N) och som har riktningskoefficienter $\ell - \varepsilon$ respektive $\ell + \varepsilon$. Men det betyder, om k är tillräckligt stort, att (b_k, a_k) måste ligga mellan de räta linjerna som skär varandra i origo och som har riktningskoefficienter $\ell - 2\varepsilon$ och $\ell + 2\varepsilon$ eftersom b_k växer strängt monotont mot $+\infty$. Det existerar alltså ett M så att

$$k \geq M \implies \ell - 2\varepsilon < \frac{a_k}{b_k} < \ell + 2\varepsilon,$$

vilket ju precis betyder att $\lim(a_k/b_k) = \ell$.

2.44 Gränsvärdena blir i tur och ordning $1/\sqrt{2}$, $1/\sqrt{3}$ och $1/\sqrt{6}$.

2.46 Det gäller att E är öppen precis då randen till E är en delmängd av komplementet till E, dvs $\partial E \subset \complement E$. Men randen till E och randen till $\complement E$ är förstås samma mängd, så E är öppen precis då $\partial(\complement E) \subset \complement E$, dvs precis då $\complement E$ är sluten.

3.3 Vi låter $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ och $t_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. För alla $n \geq N$ gäller det då att $s_n = t_n + C$, där $C = s_{N-1} - t_{N-1}$ är oberoende av n. Alltså gäller det att $\lim s_n$ existerar om och endast om $\lim t_n$ existerar.

3.4

a) konvergent b) divergent c) konvergent

3.6

a) $n\dfrac{1-x^n}{1-x} - \dfrac{n-1}{1-x} + x\dfrac{1-x^{n-1}}{(1-x)^2}$

b) $\dfrac{1 + x - (1+n)^2x^n - (1 - 2n - 2n^2)x^{n+1} - n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}$

3.7 Konvergent om $p > 0$ och absolutkonvergent om $p > 1$.

3.9 Nästa term är $1/5$, så felet blir mindre än $1/5$.

3.10 Visa att $\sum a_k^2$ är absolutkonvergent. Svaret på den andra frågan är nej, vilket du kan verifiera själv genom att betrakta till exempel $a_k = (-1)^k/\sqrt{k}$.

3.12 Låt $a_k = 1/k$ och använd Dirichlets test, sats 3.23.

3.13 Vad kan man säga om mängden av $x \in \mathbb{R}$ för vilka potensserien $\sum a_k x^k$ är konvergent? Kanske supremumaxiomet vara användbart.

3.14

a) Jämför binomialutvecklingen i lösningen till 2.18.

b) Fixera k och låt $n \geq k$. Det gäller då att

$$1 + 1 + \frac{1}{2!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) + \cdots + \frac{1}{k!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{2}{n}\Big)\cdots\Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big) \leq a_n.$$

Låt $n \to +\infty$. Då kommer högerledet att konvergera mot e, emedan vänsterledet konvergerar mot s_k. Eftersom olikheter bevaras vid gränsövergång gäller det att $s_k \leq e$.

c) Detta följer av instängningssatsen, eftersom $a_n \leq s_n \leq e$ för alla $n \in \mathbb{N}$, och $\lim a_n = e$.

3.15

a) Vi uppskattar med en geometrisk serie,

$$\begin{aligned}
0 < e - s_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots\right) \\
&< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1 - 1/(n+2)} < \frac{1}{n \cdot n!}.
\end{aligned}$$

b) Vi gör ett motsägelsebevis, och antar att vi kan skriva $e = p/q$, där p och q är saknar gemensamma delare större än 1. Vi har just sett att e uppfyller olikheten $0 < e - s_n < 1/(n \cdot n!)$ för varje $n \in \mathbb{N}$. Speciellt gäller då att $0 < e - s_q < 1/(q \cdot q!)$. Multiplicerar vi den olikheten med $q!$ finner vi att $0 < q!e - q!s_q < 1/q$. Både $q!e$ och $q!s_q$ är heltal, och alltså är även deras differens det. Vidare är $1/q < 1$ (vi har tidigare sett att $2 < e < 3$ så q kan inte vara 1). Vi har nått en motsägelse, eftersom det inte kan finnas några heltal strikt mellan 0 och $1/q$.

3.19 Låt $n \geq 0$ och $|x| < 1$ vara givna. Genom att flytta över n termer i definitionen av exponentialfunktionen, finner vi att

$$\exp(x) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Triangelolikheten för serier, övning 3.5, ger oss uppskattningen

$$\left|\exp(x) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{|x|^k}{k!}.$$

För varje $k \geq n + 1$ gäller det att $k! \geq (n + 1)!$. Termerna i högerledet uppskattas på så vis, varefter en geometrisk serie med kvot $|x| < 1$ återstår,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{|x|^k}{k!} \leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=n+1}^{+\infty} |x|^k = \frac{1}{(n+1)!} \frac{|x|^{n+1}}{1 - |x|}.$$

3.20 Konvergenta: a), b), d), h), k), m), o).

3.21 $1/(k \cdot k!)$

3.22 $21/4$ eller $37/12$

3.23 Serien är nästan geometrisk. Jämför. Serien är konvergent.

3.24

a) $-1 \leq x < 1$ b) $|x| \neq 1$ c) $-1 \leq x < 1$ d) $-1 < x < 1$

3.25 $\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k+(-1)^k}$ duger.

3.26 För alla a och b sådana att $a < b$ (använd kvottestet).

3.29 Nej (gör en lämplig omskrivning av termerna)

Referenser

[1] LANDAU, E., *Foundations of Analysis. The Arithmetic of Whole, Rational, Irrational and Complex Numbers*, Chelsea Publishing Company, New York, N.Y., 1951.

Index

Symboler