SYMBOLER OCH MÄNGDTERMINOLOGI

Lite mängdterminologi

En *mängd* består av *element*. En mängd M som innehåller elementen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ skrives $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Om vi har en mängd M så skriver vi $p \in M$ om p är ett element i mängden M och $p \notin M$ om p ej är ett element i mängden M. Man kan alltså säga att tecknet $\in$ betyder "tillhör" och $\notin$ betyder "tillhör inte".

Exempel: Om M är mängden $M = \{1, 4, 5, 7, 10\}$ så gäller till exempel att $1 \in M$ och $6 \notin M$. Nedan har vi de olika vanligaste talmängderna:

Beteckning	Namn	Mängd
$\mathbb{N}$	Naturliga tal	$0, 1, 2, 3, 4 \ldots,$
$\mathbb{Z}$	Heltal	$\ldots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$
$\mathbb{Q}$	Rationella tal	p/q där $p, q \in \mathbb{Z}$, och $q \neq 0$
$\mathbb{R}$	Reella tal	"Vanliga tal" Kan ej definieras på en rad
$\mathbb{C}$	Komplexa tal	$x + iy$, där $x, y \in \mathbb{R}$ och $i^2 = -1$

Givet två mängder A och B så är *unionen* $A \cup B$ mängden av alla element som antingen ligger i A *eller* B. Snittet $A \cap B$ är mängden av alla element som ligger i *både* A och B. Vidare skriver vi $A \setminus B$ för mängden element som ligger i A *men ej* i B. Detta kan skrivas i förkortad form som

$$A \cup B = \{x : x \in A \ \texttt{eller} \ x \in B\}$$
$$A \cap B = \{x : x \in A \ \texttt{och} \ x \in B\}$$
$$A \setminus B = \{x : x \in A \ \texttt{och} \ x \notin B\}$$

Här betyder uttrycket $\{x : \texttt{Villkor}\}$ alla reella tal x sådana att villkoret "Villkor" är uppfyllt. Kolonet kan översättas "sådana att". Man kan också skriva $\{x \in \mathbb{R} : \texttt{"Villkor"}\}$ för att understryka att x är reellt. Observera att man kan uttrycka en och samma mängd på olika sätt. Se här nedan ochjämför med ovanstående:

$$A \cap B = \{x \in A : x \in B\} \quad \text{och} \quad A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}.$$

Exempel: Om $A = \{2, 3, 4, 7, 9\}$ och $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 10\}$ så är $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10\}$, $A \cap B = \{2, 3\}$ och $A \setminus B = \{4, 7, 9\}$.

På reella axeln finns det fyra typer av intervall. Givet två reella tal a, b som uppfyller $a < b$ så definierar vi

$$\begin{aligned}
(a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \\
[a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \\
(a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \\
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}
\end{aligned}$$

Man kan inkludera möjligeheten att $a = -\infty$ och $b = \infty$, där ∞ står för "oändligheten". För varje reellt tal x gäller då att $-\infty < x$ och $x < \infty$. De reella talen tillsammans med symbolerna $\infty, -\infty$ och relationen $-\infty < x < \infty$ kallas *det reella talsystemet*. Vi utvidgar definitionen ovan med

$$\begin{aligned}
(-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \\
(-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \\
(a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x\} \\
[a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\} \\
(-\infty, \infty) &= \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Notera att man skriver aldrig hakparentes bredvid ∞-symbolen.

Exempel: Om A och B är intervall, tex $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x \leq 3\}$ och $B = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x < 10\}$ så skriver vi $A = (1, 3]$ och $B = (2, 10)$. Vi får $A \cap B = (2, 3]$ och $A \cup B = (1, 10)$, vilket också kan skrivas $A \cap B = \{x : 2 < x \leq 3\}$ och $A \cup B = \{x : 1 < x < 10\}$.

En mängd A är en *delmängd* till B om varje element i A också är ett element i B. Vi skriver $A \subset B$, eller $A \subseteq B$ för att understryka att A faktiskt kan vara samma mängd som B. *Komplementet* M^c till en mängd M är mängden av alla element som inte ligger i M. En mängd M som inte innehåller något element alls kallas *tomma mängden* och skrives $M = \emptyset$.

Element i $\mathbb{R}$ kallas vanligen för *punkter*. Ett intervall på formen (a, b) kallas *öppet* (även om $a = -\infty$ och/eller $b = \infty$). Ett intervall på formen $[a, b]$ kallas *slutet* om $a, b \neq \pm\infty$, men även intervallen $(-\infty, b]$ och $[a, \infty)$ kallas slutna. Intervallet $(-\infty, \infty)$ är det enda intervallet som både är öppet och slutet (lustigt nog). En *omgivning* U till en punkt $x \in \mathbb{R}$ är ett öppet intervall som innehåller x. En mängd $M \subset \mathbb{R}$ är *öppen* om varje punkt $x \in M$ har egenskapen att det finns en omgivning U till x sådan att $U \subset M$. Mängden M är *sluten* om dess komplement är öppet.

Exempel Låt $A = \{x : 1 < x < 5\} = (1, 5)$. A är alltså ett *öppet intervall.* Notera att varje $x \in A$ har en omgivning U (som beror på x) som helt ligger i A. A är alltså en öppen mängd medan dess komplement $A^c = \{x : x \leq 1 \text{ eller } x \geq 5\}$ är en sluten mängd. Vi kan också skriva $A^c = (-\infty, 1] \cup [5, \infty)$, dvs A^c är unionen av två slutna intervall. Det torde vara klart att öppna intervall alla är exempel på öppna mängder.

Några symboler

Beteckning	Betydelse
$\forall$	för alla
$\exists$	(det) existerar
$\therefore$	alltså
$\in$	tillhör
$\notin$	tillhör inte
$\subset$	delmängd av
$\Rightarrow$	implicerar att
$\Leftrightarrow$	ekvivalent med
$\longrightarrow$	konvergerar mot
$\neg A$	icke A (om påståenden)
$\equiv$	identiskt lika med
Q.E.D.	Quad est demonstrandum (vilket skulle bevisas)

Några ord om logik

Låt A och B vara påståenden. Vi skriver $A \Rightarrow B$ om A *implicerar* B. Om både A implicerar B och B implicerar A så är A och B *ekvivalenta* och vi skriver $A \Leftrightarrow B$. Notera att om $A \Rightarrow B$ så gäller att $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Några enkla regler om olikheter

1. Om $a \leq b$ och $c < 0$ så gäller

$$ac \geq cb.$$

Om $a \leq b$ och $c \geq 0$ så gäller

$$ac \leq cb.$$

2. Ur detta kan härledas att om $a, b \neq 0$ har samma tecken och $a \leq b$ så gäller

$$\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}.$$

Övning: Bevisa det!

Lemma 0.1. *Låt $a, x \in \mathbb{R}$. Då är följande påståenden ekvivalenta:*

(1) $a^2 \leq b^2$,
(2) $|a| \leq |b|$,
(3) $-|b| \leq a \leq |b|$.