Blixtkurs i komplex integration

Sven Spanne

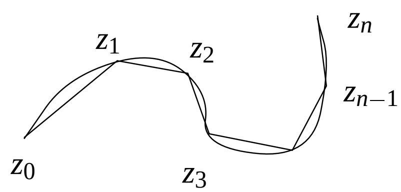
8 oktober 1996

1 Komplex integration

Vad är en komplex kurvintegral?

Antag att $f(z)$ är en komplex funktion och att C är en kurva i det komplexa talplanet. Man kan då beräkna den *komplexa kurvintegralen* av f över C så här; gå genom kurvan under ett intervall $a \leq t \leq b$, dvs $z = z(t)$ genomlöper kurvan. Sampla intervallet som $a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = b$. Det ger punkterna $z_k = z(t_k)$ på kurvan. Då är

$$\begin{aligned} \int_C f(z)\,dz &\approx \sum_k f(z_k)\Delta z_k = \\ &= \sum_k f(z_k)\frac{\Delta z_k}{\Delta t_k}\Delta t_k \approx \int_a^b f(z)\frac{dz}{dt}\,dt. \end{aligned}$$



Vad gör man om man kan reella kurvintegraler?

Dela upp f och z i real- och imaginärdel, $f = u + iv$, $z = x + iy$, $dz = dx + idy$. Då är

$$\begin{aligned} f(z)\,dz &= (u + iv)(dx + idy) = \\ &= u\,dx - v\,dy + i(v\,dx + u\,dy) \end{aligned}$$

och alltså

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C u\,dx - v\,dy + i\int_C v\,dx + u\,dy$$

Kan man sin Analys B så kan man kanske räkna ut de två reella kurvintegralerna till höger.

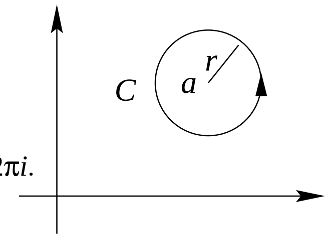
Det enda exemplet

Räknar man ut komplexa integraler med definitionen? Nej, det slipper man nästan alltid göra. Här nedan finns det enda (nästan) nödvändiga exemplet.

Exempel 1 Beräkna integralen av $f(z) = 1/(z-a)$ över cirkeln $C : |z-a| = r$ genomlöpt ett varv i positiv led.

Kurvan ges av $z = a + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
Detta ger $\dfrac{dz}{dt} = rie^{it}$ och alltså är

$$\int_C \frac{1}{z-a}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} rie^{it}\,dt = \int_0^{2\pi} i\,dt = 2\pi i.$$

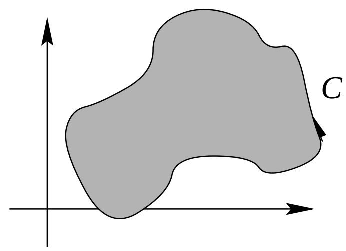


Lägg märke framför allt till att värdet inte beror av hur stor cirkelns radie är.

Alla integraler blir noll!

Använder man Greens formel på uttrycken ovan finner man att

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$



om

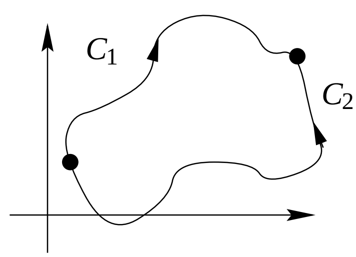
- C är en sluten kurva
- $f(z)$ är analytisk överallt innanför (och på) kurvan C.

(Detta kallas för *Cauchys integralsats*, sats 13.3).

Alla integraler blir lika!

Antag nu att två kurvor C_1 och C_2 har samma begynnelsepunkt och samma slutpunkt. Om $f(z)$ är analytisk *överallt* mellan kurvorna, så är

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz.$$



Detta följer av att kurvan $C = C_1 - C_2$ (först C_1, sedan C_2 baklänges) är sluten och $f(z)$ är analytisk överallt innanför den. Alltså är

$$\int_C = \int_{C_1} - \int_{C_2} = 0$$

enligt Cauchys integralsats. (Om de båda kurvorna skär varandra i fler punkter än början och slut får man tänka några ögonblick till.)
Anm. I sats 13.6 finns beskrivet ett antal relationer mellan olika egenskaper hos f som har med analyticitet och integration att göra.

Att återbilda funktioner

Om

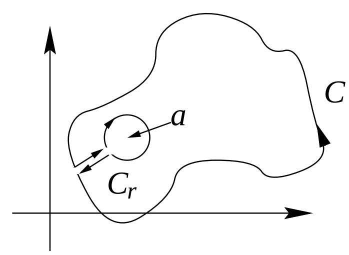
- C är en sluten positivt orienterad kurva (som inte skär över sig själv)
- $f(z)$ är analytisk innanför (och på) C
- a är en punkt innanför C

så är

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a}\, dz.$$

Man kan alltså rekonstruera f innanför kurvan med hjälp endast av dess värden på kurvan. Formeln kallas för Cauchys integralformel (sats 13.8). Härledningen går mycket förkortat till ungefär så här (med $C_r : |z-a| = r$):

$$\begin{aligned}\int_C \frac{f(z)}{z-a}\, dz &= \int_{C_r} \frac{f(z)}{z-a}\, dz \approx \\ &\approx f(a) \int_{C_r} \frac{1}{z-a}\, dz = f(a) 2\pi i.\end{aligned}$$



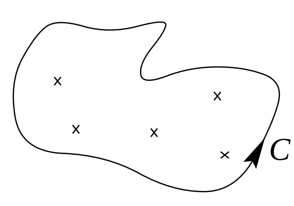
Först flyttar vi integrationsvägen till en liten cirkel kring a, sedan använder vi att $f(z) \approx f(a)$ om $z \approx a$.

2 Residykalkyl

Inte alla integraler är noll!

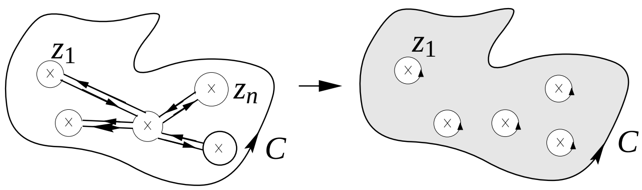
Integraler över en sluten kurva är som synes ovan inte alltid noll och kan därför vara användbara. Anledningen är då att $f(z)$ inte är analytisk *överallt* innanför kurvan. Det enklaste fallet, och det enda vi skall se på här, är att $f(z)$ är analytisk utom i ett antal enstaka punkter.

I allmänhet svarar dessa punkter mot nollställen i en nämnare, och de kallas då för funktionens *poler*. I figuren är polerna markerade med kryss. I fall där funktionen är analytisk utom i ett antal poler finns effektiva metoder att beräkna integralens värde utan att man behöver leta efter primitiva funktioner etc. Detta är en favoritmetod bland tekniker för att beräkna integraler.



2.1 Residysatsen

Idén för metoden är samma som i beviset av Cauchys integralformel. Man flyttar integrationskurvan utan att gå över singulariteter (punkter där f ej är analytisk). Då ändras inte integralens värde. Som framgår av figuren kan man ersätta det ursprungliga C-et med små cirklar, en kring varje pol.



Detta kan skrivas

$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \cdots + \int_{C_n}$$

Nu inför man en speciell beteckning. Med *residyn* av funktionen f i punkten $z = a$ menas talet

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} f(z)\, dz$$

Förutsättningarna är

- $C(a,r)$ är en (liten) cirkel med radie r och medelpunkt a, genomlöpt ett varv i positiv led
- funktionen $f(z)$ är analytisk överallt innanför $C(a,r)$ men ej (nödvändigtvis) i $z = a$.

Då beror värdet av integralen inte på r. (Faktorn $2\pi i$ gör det lättare att beräkna residyerna.)

Resultatet är *Residysatsen:*

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Beräkning av residyer

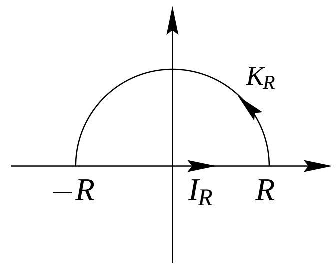
För beräkning av residyer finns ett antal regler, som kan återfinnas på formelbladet. Ännu enklare är att använda Maple, som har en funktion `residue` som tar fram residyerna direkt.

3 Användningar av residysatsen

Residysatsen har många användningar, men vi skall här bara se på några beräkningar av integraler över ett *reellt* intervall. Här måste man på något sätt fixa till en *sluten* kurva från det reella intervallet. Det finns två varianter:

- En reell integral, t ex över intervallet $0 \le t \le 2\pi$, tolkas om som en integral över enhetscirkel (baklänges parametrisering) som sedan beräknas med residysatsen.
- En reell integral över hela reella axeln (generaliserad från $-\infty$ till $+\infty$) är gränsvärde av en integral från $-R$ till $+R$ då $R \to +\infty$. Integralen över $(-R, R)$ utökas till en sluten kurva genom tillägg av en stor halvcirkel, vars bidrag sedan försvinner då $R \to +\infty$.

I det senare fallet gäller det att verkligen verifiera att bidraget från den tillagda halvcirkeln försvinner, annars får man fel värde eller tror sig ha funnit ett värde på en divergent integral.



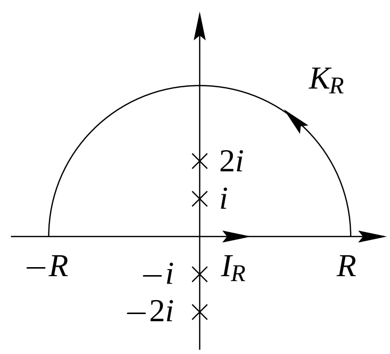
Rationella funktioner

Se även avsnitt 13.6. Vi visar nedan hur man med Maple och residysatsen kan beräkna en relativt komplicerade integraler.

Exempel 2 Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(4+x^2)^2}\, dx.$$

Lösning:
Integranden har enkelpoler i $\pm i$ och dubbelpoler i $\pm 2i$. Vi väljer att sluta integrationsvägen med en stor halvcirkel i övre halvplanet.



Integralen kan alltså beräknas med formlerna

$$g(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)^2}$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx = 2\pi i (\operatorname*{Res}_{z=i} g(z) + \operatorname*{Res}_{z=2i} g(z)).$$

Vi låter Maple beräkna den dels med sin egen metod (som här bygger på primitiva funktioner), dels med residykalkyl:

```
> readlib(residue);

proc(f,a) ... end
```

```
> g:=z->1/(1+z^2)/(4+z^2)^2;
```

$$g := z \to \frac{1}{(1+z^2)(4+z^2)^2}$$

```
> Int(g(x),x=-infinity..infinity)=int(g(x),x=-infinity..infinity);
```

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)(4+x^2)^2}\,dx = \frac{5}{144}\pi$$

```
> 2*Pi*I*(residue(g(z),z=I)+residue(g(z),z=2*I));
```

$$\frac{5}{144}\pi$$

Det blir lyckligtvis samma svar.

Fouriertransformer

Integraler av typen ovan går att klara med partialbråksuppdelning, även om det är jobbigare än med residymetoden. Nu kommer vi till en typ där det inte finns någon elementär primitiv funktion alls. En integral av typen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\,dx$$

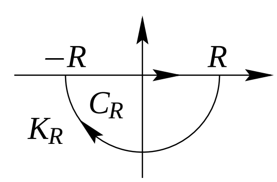
kallas för en *Fourierintegral*. (Parametern t svarar mot lärobokens $-\xi$ men är lättare att skriva för teknologer.) Den påminner om Fourierkoefficienterna, men är utsträckt över hela reella axeln i stället för över ett periodintervall. Om f t ex är en rationell funktion så beräknas Fourierintegralen med fördel med residymetoden, men här uppstår ett nytt problem. Antag att vi lägger till en halvcirkel K_R i övre halvplanet. Kan verkligen integralen över den tillagda halvcirkeln försummas, dvs är $e^{itz} f(z)$ litet på halvcirkeln? Det visar sig (se läroboken) att detta hänger mest på exponentialfaktorn. Om $z = x + iy$ så är $itz = itx - ty$ och vi får

$$|e^{itz}| = e^{\mathrm{Re}\, itz} = e^{-ty}$$

Om $t > 0$ så är allt gott och väl, även y är positivt i övre halvplanet och e^{-ty} är litet där. Vi kan då använda residyformeln

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, z>0} \operatorname*{Res}_z e^{itz} f(z) \qquad t > 0.$$

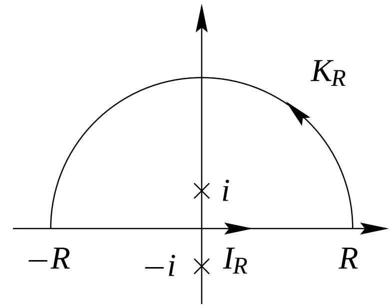
Om $t < 0$ så fungerar det däremot inte. Man måste då i stället lägga till en halvcirkel i *nedre* halvplanet. Detta innebär att integrationskurvan C_R går runt i *negativ* led, vilket måste kompenseras med ett minustecken i residyformeln, som i detta fall alltså får utseendet



$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(x)\,dx = -2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, z<0} \operatorname*{Res}_z e^{itz} f(z), \qquad t < 0.$$

Exempel 3 Vi beräknar Fourierintegralen

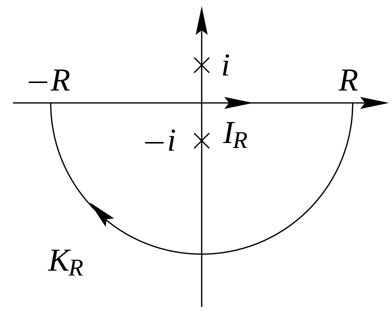
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \frac{1}{x^2+1}\, dx.$$



Lösning:
Integranden är $f(z) = 1/(1+z^2)$ med poler i $z = \pm i$. I övre halvplanet ligger polen i och i undre halvplanet polen $-i$. Maplekommandot

```
2*Pi*I*residue(exp(I*t*z)/(z^2+1),z=I);
```

ger svaret πe^{-t}, vilket alltså är svaret då $t > 0$.



Maplekommandot

```
-2*Pi*I*residue(exp(I*t*z)/(z^2+1),z=-I);
```

ger svaret πe^{t}, vilket är svaret då $t < 0$. Integralens värde har alltså olika utseenden för $t > 0$ och $t < 0$.

Med hjälp av absolutbelopp kan här de båda fallen sammanföras i en enda formel.
Svar: Integralens värde är $\pi e^{-|t|}$.

Observera att Maple ofta ger **fel svar** om man försöker räkna ut sådana integraler direkt! Kommandot `int(exp(I*x)/(1+x^2),x=-infinity..infinity)` (alltså $t = 1$) ger svaret 0 som är helt fel!

Trigonometriska integraler

Idén är att en trigonometrisk integral av formen

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt$$

kan överföras på en komplex integral över enhetscirkeln $|z| = 1$, och denna beräknas sedan lätt med residykalkyl. Parametriseringen är ju $z = re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. Detta ger

$$dz = ie^{it}dt = izdt, \quad \sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right) = \frac{1}{2i}(z - z^{-1}), \quad \cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right) = \frac{1}{2}(z + z^{-1}).$$

Exempel 4 Beräkna integralen

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4 - \sin t}\, dt.$$

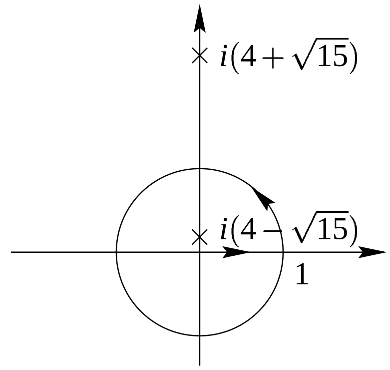
Substitutionerna ovan ger efter förenkling

$$I = \int_C \frac{1}{4 - \frac{1}{2i}(z - z^{-1})} \frac{1}{iz}\, dz = -2\int_C \frac{1}{z^2 - 8iz - 1}\, dz$$

där C är enhetscirkeln.

Vi vill använda residysatsen och behöver därför nämnarens poler. Lösning av ekvationen ger

$$z^2 - 8iz - 1 = 0 \iff z_{1,2} = 4i \pm \sqrt{-16+1} = i(4 \pm \sqrt{15}).$$



Roten $z_1 = i(4+\sqrt{15})$ ligger utanför enhetscirkeln medan $z_2 = i(4-\sqrt{15})$ ligger inuti. Residysatsen ger alltså

$$I = -2\left(2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_2} \frac{1}{z^2 - 8iz - 1}\right) = -4\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_2} \frac{1}{z^2 - 8iz - 1}$$

Detta uttryck kan mycket lätt beräknas med residyregel 4 på formelbladet, om man vill träna komplex räkning för hand. Annars ger Maple svaret med kommandot

```
-4*Pi*I*residue(1/(z^2-8*I*z-1),z=I*(4-sqrt(15)));
```

$$I = \frac{2}{15}\pi\sqrt{15}.$$