Att skissera grafen till en funktion

Exempel: Rita grafen till funktionen

$$f(x) = 2\frac{x^2}{x+3}, \quad x \in \mathbb{R},$$

med angivande av eventuella extrempunkter och asymptoter.

1. Beräkna derivatan och bestäm stationära punkter. Vi börjar med att beräkna derivatan för att kunna bestämma alla s.k. *stationära punkter*. Här måste vi använda "kvotregeln":

$$f'(x) = 2\frac{2x(x+3) - x^2 \cdot 1}{(x+3)^2} = 2\frac{x^2+6x}{(x+3)^2}.$$

Vi ser att

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 6x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -6 \end{cases}$$

så $x = 0$ och $x = 6$ är stationära punkter. Genom att bestämma alla stationära punkter får vi fram alla punkter som *kan* vara lokala extrempunkter.

2. Undersök derivatans tecken med teckentabell. Nu när vi har beräknat alla stationära punkter ska vi kolla vilka av dem som är *lokala extrempunkter* samt, i så fall, vilken typ de är (*maximum* eller *minimum*). Detta görs genom ett *teckenstudium* av derivatan.

Innan vi kan studera derivatans tecken måste vi *faktorisera* täljare och nämnare:

$$f'(x) = 2\frac{x(x+6)}{(x+3)^2}.$$

Vi ritar nu en tabell med två axlar. På den lodräta axeln skriver vi upp alla *faktorer* vi har i täljaren *och* nämnaren, och på den vågräta axeln alla *stationära punkter* som beräknats *och* alla *nollställen till nämnaren.*

	-6	-3	0
2			
x			
$x+6$			
$(x+3)^2$			

Nu fyller vi i teckentabellen genom att ange hur tecknet för varje faktor varierar i olika intervall. (Tänk på den vågräta axeln som en tallinje.) Tabellen ser då ut så här:

		-6		-3		0	
2	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x	-	-	-	-	-	0	$+$
$x+6$	-	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x+3)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	-	$\nexists$	-	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-24	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Näst längst ner skriver vi ut vilket tecken $f'(x)$ har i varje intervall. Tecknet kan vi läsa av i varje lodrät kolumn - jämnt antal minustecken ger plus, udda antal minustecken ger minus. Allra längst ner markerar vi hur $f(x)$ växer respektive avtar i varje intervall. Tecknet $\nexists$ betyder att funktionen/derivatan ej är definierad där. (Observera att vi egentligen inte hade behövt ta med faktorn 2, då den alltid är positiv.)

Från teckentabellen kan vi nu läsa av lokala extrempunkter. Växlingen $\nearrow\ 0\ \searrow$ för $x = -6$ ger att denna är en *lokal maximipunkt* med *lokalt maximivärde* $f(-6) = -24$, medan $\searrow\ 0\ \nearrow$ indikerar att

$x = 0$ är en *lokal minimipunkt* med *lokalt minimivärde* $f(0) = 0$.

3. Beräkna gränsvärden och bestäm eventuella asymptoter. Nu tar vi reda på funktionens gränsvärden då $x \to \infty$, $x \to -\infty$ samt då $x \to a$ för alla punkter a där $f(x)$ ej är definierad.

Genom gränsvärdesberäkningar ser vi att

$$f(x) = 2\frac{x^2}{x+3} = 2\frac{x}{1+\frac{3}{x}} \longrightarrow \begin{cases} \infty & \text{då } x \to \infty \\ -\infty & \text{då } x \to -\infty \end{cases}$$

och

$$f(x) = 2\frac{x^2}{x+3} \longrightarrow \begin{cases} \text{“}2\frac{(-3)^2}{0^+}\text{“} = \infty & \text{då } x \to -3^+ \\ \\ \text{“}2\frac{(-3)^2}{0^-}\text{“} = -\infty & \text{då } x \to -3^- \end{cases}$$

Eftersom det efterfrågas i uppgiften, bestämmer vi också eventuella asymptoter.

Genom polynomdivision får vi

$$f(x) = 2 \cdot \left(x - 3 + \frac{9}{x+3} \right) = 2x - 6 + \frac{18}{x+3},$$

och då

$$f(x) - (2x - 6) = \frac{18}{x+3} \to 0 \quad \text{då } x \to \pm\infty$$

följer att $y = 2x - 6$ är asymptot både då $x \to \infty$ och $x \to -\infty$.

4. Skissera grafen till funktionen. Vi samlar nu ihop all information från punkt 1-3 och skisserar grafen till funktionen. (Observera den väldiga skillnaden i skala mellan x- och y-axel.)