Inlämningsuppgifter i System och transformer *ht 2018*

För att man ska bli godkänd på kursen krävs att både skrivning, inlämningsuppgifter och laborationer är godkända. Inlämningsuppgifterna är alltså obligatoriska. I kursplanen står det: "**Prestationsbedömning:** Skriftligt prov omfattande teori och problem. Datorlaborationer och obligatoriska inlämningsuppgifter som ska vara utförda före tentamen." Alltså ska bl a inlämningsuppgifterna vara godkända **innan** den skriftliga tentamen. De normala inlämningstillfällena för de två inlämningsuppgifterna anges längre ner. Om man av någon anledning, t ex sjukdom inte har möjlighet att lämna in uppgifterna under kursens gång så finns möjlighet senare under läsåret. En vecka innan varje omtentamenstillfälle tar vi emot missade inlämningsuppgifter. I dessa fall ska samtliga uppgifter lämnas in. Det kan därför vara klokt att spara det man hunnit göra med inlämningsuppgifterna under kursens gång.
När alla obligatoriska inlämningsuppgifter är godkända och datorlaborationer fullgjorda förs detta in i LADOK (rubrik: **Datorlaborationer**). Slutbetyg på kursen förs in när såväl den skriftliga tentamen som de obligatoriska momenten är avklarade. Resultatet på den skriftliga tentamen avgör slutbetyget.

Varför har vi inlämningsuppgifter?

Bland kursens mål och syfte finns förutom faktakunskaper om kursinnehållet enligt studiehandboken att ge:

- förmåga att lösa problem, tillgodogöra sig matematisk text och att kommunicera matematik
- färdighet i egen problemlösning
- träning i att för andra redovisa matematiska överläggningar
- träning i att använda matematiska datorprogram

Detta är svårt att göra enbart under lektioner och ännu svårare att testa vid en femtimmarstentamen. Därför har vi inlämningsuppgifter. Eftersom uppgifterna inte enbart är till för att träna problemlösning läggs en hel del vikt även vid presentationen. Som ett allmänt mål kan du ta att skriva lösningarna så att du själv och kurskamraterna skall kunna läsa och förstå dem även efter några månader (innan kursen blivit helt bortglömd).

Några regler för utförandet

- Arbetet får gärna göras i samarbete. Ange i så fall med vem. Om ni samarbetar två och två, så är det tillåtet (och uppmuntrat) att ni lämnar in en gemensam lösning. Märk försättsbladet tydligt med bådas namn och personnummer.

  Kör du fast eller är osäker så använd alla tillgängliga hjälpmedel, läroboken, övningssamlingen, dina lärare, kamrater, . . . för att komma vidare. (Det betyder dock inte att det är tillåtet att någon annan förser dig med en fullständig lösning... Det är heller inte ok att fråga efter fullständiga lösningar på onlineforum.)

- Redogörelserna ska vara **handskrivna** och prydliga.
- Inled redogörelsen med ett försättsblad, hämta den från hemsidan.

- Sortera uppgifterna i nummerordning.
- Redogörelserna skall vara läsbart uppställda och utskrivna.
- Se till att svara på de frågor som som ställs i uppgiften.
- Alla räkningar skall vara inskrivna.
- Förklara de beteckningar som du inför.
- Förklara de olika stegen och ge logiska motiveringar till dem. *Skriv text*, helst fullständiga meningar, och namnge om möjligt de resultat du använder (geometrisk summa, faltning, Laplacetransform, ...).
- Börja om möjligt med en kort presentation av det problem du löser och sluta om det passar med en sammanfattning av resultaten. Du behöver förstås inte göra det överdrivet detaljerat utan får förutsätta att läsaren har problemtexten tillgänglig.
- Rita figurer varje gång det kan förbättra förståelsen.
- Alla körningar i Matlab eller Maple redovisas genom att en körjournal bifogas - om inget annat sägs i uppgiften. **Kommentera utfallet!** En av anledningarna att vi har en del datorinslag i uppgifterna är att vi vill att ni ska träna på att fundera och reflektera över datorns svar.

Rättning av uppgifterna

Hur och av vem dina inlämningsuppgifter kommer att rättas är inte avgjort vid denna tidpunkt. Sök namnet på din rättare i kursens hemsida och använd hans/hennes fack för kommunikation. Använd försättsbladet som också kommer att finnas på hemsidan.
Vi använder skalan G/U vid rättningen. Om du får U på någon uppgift, så måste du lämna in en komplettering av denna. Se till att bli helt godkänd på den första uppsättningen inlämningsuppgifter innan det är dags för den andra uppsättningen!

Checklista för bedömning av inlämningsuppgifter

Ni skall också själva pröva att bedöma lösningar, för att träna flera av kursmålen ovan. Det kan då vara bra att ha en liten checklista:

- Går lösningen att läsa?
- Förklarar författaren sina beteckningar?
- Är räkningarna ordentligt uppställda i logisk ordning?
- Talar författaren om vilka (inte självklara) formler och satser som används?
- Svarar författaren på den fråga som ställs i uppgiften?
- Är framställningen språkligt korrekt?
- Är resultatet rimligt (använd sunt förnuft)?
- Är resultatet riktigt?

Det är inte meningen att det skall skrivas några doktorsavhandligar i denna kurs, men en bra behandling av punkterna ovan är något att sikta emot. Du kanske kan hjälpa till med att fylla på i checklistan så småningom.

Inlämningsuppgift 1

Inlämning: Lösningarna lämnas in senast kl 17 måndagen den 11 april 2016 i ett speciellt fack på tredje våningen i matematikhuset. Kontrollera att du har skrivit namn och kursprogram på dina lösningar. Uppgifterna läggs i din rättares fack.
Hämtning: De rättade uppgifterna kan hämtas i ett fack bredvid inlämningsfacket. Uppgifterna bör vara rättade inom en vecka efter inlämningsdatum, kanske tidigare. Om du har någon deluppgift som är U-märkt rekommenderas du att omgående rätta den och därefter lämna in den **på nytt blad** för ny bedömning. Alla deluppgifterna ska alltså vara godkända för att inlämningsuppgiften i sin helhet ska betraktas som godkänd.

1.1 a) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$\begin{bmatrix} 11 & -6 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}$$

b) Bestäm den allmänna lösningen till systemet

$$\begin{cases} x_1'(t) = 11x_1(t) - 6x_2(t) \\ x_2'(t) = 12x_1(t) - 6x_2(t) \end{cases}$$

c) Ange ett approximativt värde på förhållandet $x_1(t) : x_2(t)$ då t är stort. Finns förhållandet i någon av egenvektorerna du beräknade i a)?

1.2 Du ska studera diagonaliserbarhet med hjälp av matrisen `A = rosser` och matrisen `B = gallery(5)` . Dessa matriser finns tillgängliga i Matlab. Bara skriv som ovan, så får `A` och `B` rätt värden.
För att slippa behöva knappa in matriserna i Maple kan du göra så här:

1. Skriv i Matlab: `save('A.mat', 'A')`
2. Växla till Maple och följ där kommandosviten `Tools>Assistants>Import Data...`
3. Fönstret `Data Import Assistant` kommer upp. Leta reda på filen `A.mat` och markera det.
4. Där det står `Select a format`, välj `MATLAB` och klicka `Next`.
5. Som `Matrix Data Type` duger `anything`. Klicka `Next`. (Transponera inte.)
6. Välj `A` som `Variable name`. Sedan `Done` .
7. Skriv i Maple, `A := A[2]` så blir det rätt sedan. Upprepa för matrisen `B`.

Skriv in dina resultat på de tomma raderna och lämna in. Glöm inte att styrka resultaten med utskrifter av dina Matlab- och Mapleberäkningar.

a) Börja med att studera matrisen `B`. För att beräkna egenvärdena i Matlab, använd kommandot `eig(B)`, helst *inte* `[S,D]=eig(B)`.

Markera i din Matlabutskrift de egenvärden, som Matlab får fram. Hur många olika egenvärden hittar Matlab?____________________

____

Är `B` diagonaliserbar enligt Matlab och sats 3.9? Motivera svaret.____________

____

____

Beräkna egenvärden och egenvektorer till `B` med hjälp av Maple. Skriv `eigenvects(B);`
Stryk under egenvektorerna i din Mapleutskrift. Hur många linjärt oberoende egenvektorer hittar Maple? [1]____________________
Är `B` diagonaliserbar enligt Maple? Se sats 3.6. Motivera svaret!____________

____

____

b) Studera nu matrisen `A`.
Ändra i Matlab till `format rat`. Hur många **olika** egenvärden hittar Matlab?______
Kan Matlabs resultat användas tillsammans med sats 3.9 för att avgöra om `A` är diagonaliserbar? Motivera!____________________

____

Stryk i din Mapleutskrift under de egenvektorer, som Maple hittar. Hur många linjärt oberoende egenvektorer hittar Maple?____________________
Är `A` diagonaliserbar enligt Maple?____________________

____

[1] De egenvektorer, som Maple levererar, är linjärt oberoende.

1.3 **a)** Bestäm en partikulärlösning i form av en **stationär lösning** (se kap 4) till systemet

$$\begin{cases} x_1'(t) = -11x_1(t) + 6x_2(t) + 3e^{-it} \\ x_2'(t) = -12x_1(t) + 6x_2(t) + 4e^{-it}. \end{cases}$$

b) Bestäm den allmänna lösningen till systemet. Ange speciellt den transienta delen och den stationära delen av lösningen.

1.4 Betrakta honfåglarna i ett fågelbestånd. År n finns det x_n icke-könsmogna honkycklingar och y_n fertila vuxna honfåglar. Antag att

- var och en av de y_n vuxna fåglarna i medeltal producerar k kycklingar året därpå
- av de x_n kycklingarna överlever 80 % till året därpå. De räknas då som vuxna.
- av de y_n vuxna överlever 60 % till året därpå.

Alltså är

$$\begin{cases} x_{n+1} = & & ky_n \\ y_{n+1} = 0.8x_n & & +0.6y_n \end{cases} \quad , n = 0, 1, 2, \ldots$$

Hur ser populationen ut efter lång tid om

a) $k = \dfrac{1}{5}$ **b)** $k = \dfrac{1}{2}$ **c)** $k = 2$?

(Du får förutsätta att begynnelsetillståndet $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ är en linjärkombination av egenvektorerna till systemmatrisen och att ingen av koefficienterna i linjärkombinationen är 0.)

1.5 **a)** Beräkna $e^{\mathsf{A}t}$ om A ges av $\begin{bmatrix} 11 & -6 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}$. Jämför uppgift 1.1. (Glöm inte att du kan kontrollera ditt svar med Maple.)

b) Använd potensseriemetoden för att beräkna $e^{\mathsf{A}t}$ om A ges av $\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 9 & -6 \end{bmatrix}$. Är A diagonaliserbar?

1.6 Som bekant gäller att $\mathsf{AB} = \mathsf{BA} \Longrightarrow e^{\mathsf{A}+\mathsf{B}} = e^{\mathsf{A}} \cdot e^{\mathsf{B}}$. Nedan ska vi visa att omvändningen *inte* gäller.

Betrakta matriserna $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 8\pi \\ -2\pi & 0 \end{bmatrix}$ och $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2\pi \\ -8\pi & 0 \end{bmatrix}$.

a) Beräkna egenvärdena till A. Bestäm och förenkla e^{Λ}, där Λ är en diagonalmatris med A:s egenvärden på diagonalen.

b) Beräkna e^{A}. Behöver A:s egenvektorer bestämmas?

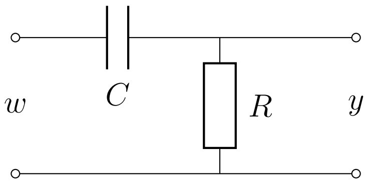
c) Beräkna e^{B} och $e^{\mathsf{A}+\mathsf{B}}$.

d) Visa att $\mathsf{AB} \neq \mathsf{BA}$ men att $e^{\mathsf{A}+\mathsf{B}} = e^{\mathsf{A}} \cdot e^{\mathsf{B}}$.

Inlämningsuppgift 2

Inlämning: Lösningarna lämnas in senast kl 17 onsdagen den 27 april 2016 i ett speciellt fack på tredje våningen i matematikhuset. Kontrollera att du har skrivit namn och kursprogram på dina lösningar. Uppgifterna läggs i din rättares fack.
Hämtning: De rättade uppgifterna kan hämtas i ett fack bredvid inlämningsfacket. Uppgifterna bör vara rättade inom en vecka efter inlämningsdatum, kanske tidigare. Om du har någon deluppgift som är U-märkt rekommenderas du att omgående rätta den och därefter lämna in den **på nytt blad** för ny bedömning. Alla deluppgifterna ska alltså vara godkända för att inlämningsuppgiften i sin helhet ska betraktas som godkänd.

2.1 Högpassfiltret i figuren till höger är linjärt, tidsinvariant och kausalt. Systemets svar på enhetssteget $w(t) = \theta(t)$ är $y(t) = e^{-t}\theta(t)$, ty $RC = 1$.



a) Ange svaret på ett förskjutet steg $w(t) = \theta(t - a)$.

b) Ange svaret på en rektangelpuls $w(t) = p_\Delta(t) = \frac{1}{\Delta}(\theta(t) - \theta(t - \Delta))$.

c) Använd Maple för att på intervallet $[-5, 15]$ rita dels rektangelpulssvaret i b) då $\Delta = 0.2$ (litet), dels systemets svar på insignalen $\Delta \cdot p_\Delta(t)$ då $\Delta = 5$ (stort). Figurerna bör visa approximationer av impulssvaret respektive stegsvaret. Se d) och e) nedan!

d) Sambandet mellan inspänning w och utspänning y kan beskrivas av differentialekvationen

$$\frac{dy}{dt} + y = \frac{dw}{dt} \tag{1}$$

eftersom $RC = 1$. Använd (1) och tekniken med integrerande faktor för att beräkna impulssvaret, dvs utsignalen då insignalen är δ. Glöm inte att multiplicera högerledet med den integrerande faktorn. Hur kan $f(t)\delta'(t)$ förenklas?
Det uppträder en integrationskonstant. Den kan du bestämma om du tänker på att systemet är kausalt.

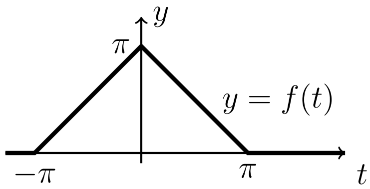
e) Verifiera att stegsvaret i ingressen stämmer med $\mathcal{S}\theta(t) = h * \theta(t)$, både för $t > 0$ och för $t < 0$.

f) Bestäm överföringsfunktionen och frekvensfunktionen.

g) Rita amplitudfunktionen då $-\infty < \omega < \infty$. Undersök speciellt vad som händer då $|\omega| \to \infty$. Varför kallas systemet ett högpassfilter?

h) Bestäm systemets svar på insignalen $w(t) = \sin(t\sqrt{3})$, $-\infty < t < \infty$.

2.2 Grafen till den sträckvis linjära funktionen f visas i figuren till höger.



a) Bestäm andraderivatan $f''(t)$ i distributionsmening.

b) Beräkna och förenkla $f'' * g(t)$ och $f * g(t)$ om $g(t) = \sin t$.

(Den andra faltningen blir lätt att beräkna om man observerar att $g''(t)$ och $g(t)$ är mycket lika.)

2.3 En funktion f ges av att $f(\tau) = \tau$ om $0 \leq \tau \leq 2$ och 0 för övrigt. Funktionen g ges av $g(\tau) = 2\big(\theta(\tau+1) - \theta(\tau-1)\big)$.

a) Rita $y = g(\tau)$ och $y = f(t-\tau)$, då $t = -1, 0, 2, 3$.

b) Beräkna med hjälp av definitionen faltningen $h(t) = f * g(t)$. Organisera dina räkningar med stöd i figurerna från a).

c) Rita med hjälp av Maple upp faltningen h, som du beräknade i b). Använd Heavisidefunktionen för att beskriva h som en funktion i Maple (`h:=t->uttryck i t`)

d) Beskriv f som en funktion med hjälp av Heavisidefunktionen. Använd Maple för att beräkna faltningen. Skriv i Maple 16

```
h:=t->int(f(t-tau)*g(tau),tau=-infinity..infinity);
```

följt av `h(t);` Om du inte får samma resultat i b), så har du (minst) ett fel att rätta till.