System och transformer

Datorlaboration 1

av Sven Spanne

Reviderad ht 2012

av Jan Gustavsson och Tomas Carnstam

LUNDS UNIVERSITET
Lunds Tekniska Högskola

Inledning

Programmet för denna datorövning är i stort att studera

- matrisoperationer med Matlab och Maple
- egenvärden, egenvektorer och diagonalisering med Matlab och Maple
- generaliserat stationära lösningar
- exponentialmatriser
- ett tidsdiskret system av differensekvationer

Ha läroboken (Spanne 1997) och övningshäftet tillgängliga. Tag gärna också med den Matlabhandledning du är van vid. Tryck ut denna labbhandledning och tag med den!

Förbered dig genom att före labben läsa igenom labbhandledningen och anvisningarna nedan. Repetera relevant teori i läroboken.

Egenvärden och egenvektorer

Matlab

En av Matlabs specialiteter är numerisk beräkning av egenvektorer och egenvärden. Om enbart egenvärdena söks räcker kommandot `eig(A)`. Om däremot både egenvärden och egenvektorer behövs fungerar kommandot `[S,D]=eig(A)`. Egenvärdena finns då som diagonalelement i diagonalmatrisen `D` och motsvarande egenvektorer uppträder som kolonner i matrisen `S`.

1.1 Beräkna egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Egenvärde	**Egenvektor**

Kontrollera att $S^{-1}AS = D$. Matrisinvers erhålls med `inv`. Bilda även för något av egenvärdena $A - \lambda_i I$, där enhetsmatrisen erhålles med `eye(2)`, och se vad som händer när du försöker invertera denna matris. Vad menas med att en matris är singulär? Svar: ____________________________ Försök även med $A - \lambda I$ där λ inte är ett egenvärde.

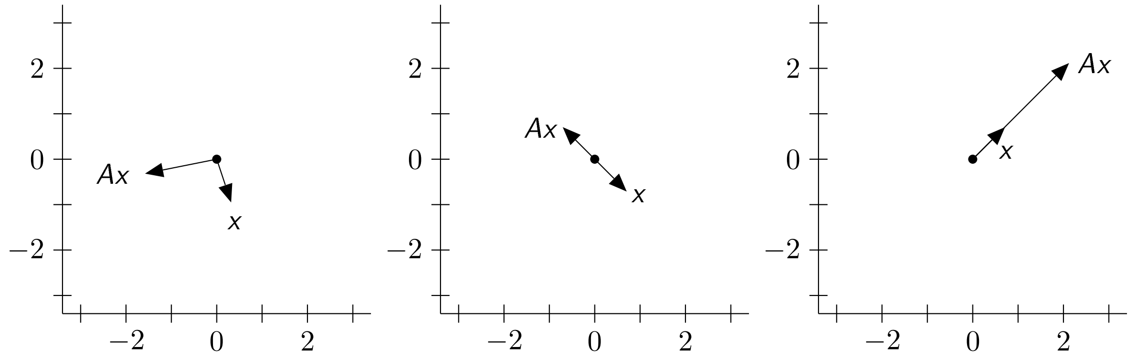
1.2 Använd inledningsvis matrisen A från 1.1. Skriv `eigshow(A)`. I det fönster, som kommer upp, pekar du med vänster musknapp på den gröna vektorn `x`. Med musknappen nedtryckt för du vektorn `x` runt enhetscirkeln. Stanna upp då `x` och `Ax` är parallella. Då är `x` en egenvektor. Varför? ______________________________

____

Koordinaterna för `x` kan du få genom att skriva `x = ginput(1)`. I det grafiska fönstret kommer det upp ett hårkors. För det med musen till spetsen av `x`. Klicka med vänster musknapp. Du kan nu avläsa koordinaterna för `x`. I programmet `eigshow` har `x` alltid längden 1. Kontrollera genom kommandot `norm(x)`. Skriv nu `Ax=ginput(1)` och flytta hårkorset till spetsen av `Ax`. Läs in koordinaterna för `Ax`. Med `norm`-kommandot kan du nu bestämma längden av `Ax`. Vad blir egenvärdet?

Jämför med tabellen i 1.1. Pröva även med andra matriser. En del finns föreslagna. I `eigshow`-fönstret finns ovanför den vita rutan ett litet fönster, som innehåller data för den matris som är i bruk. Klicka på det lilla fönstret och få tillgång till flera matriser.

1.3 Lös följande tentamensuppgift. Du kan använda Matlab för att beräkna någon invers matris och för att multiplicera några matriser.
nr 2, 20061212.
För en 2×2-matris A har du under en datorlaboration kunnat använda Matlabprogrammet `eigshow` för att samtidigt rita upp kolonnmatriserna x och Ax. Med hjälp av datormusen kunde du ändra läget för x och fick då automatiskt Ax utritad.
I figurerna nedan har matriserna x och Ax åskådliggjorts med pilar utgående från origo, vars läge markerats med en liten punkt. Alla pilarna antas utgå från origo.



a) Avläs egenvärden (heltal) och egenvektorer till A. (0.3)

b) Bestäm A. (0.4)

c) Bestäm den allmänna lösning till systemet $\dfrac{dx}{dt} = Ax$ av differentialekvationer. (0.3)

1.4 Det finns ett enkelt sätt att plocka ut diagonalelementen från en kvadratisk matris och att givet diagonalelementen bilda en diagonalmatris. Matlabkommandot heter `diag`.

Testa kommandona[1]

```
B = diag([7 8]) %Bildar en diagonalmatris med de givna
                %diagonalelementen 7 och 8.
C = [9 10 ; 11 12 ]
diag(C) %Plockar ut diagonalelementen från den givna matrisen C.
diag(diag(C))
```

[1] Det som står efter % är kommentarer, som inte ska skrivas in.

1.5 Vi försöker nu med en större matris (från övning 3.9).
Bestäm egenvärden och egenvektorer för matrisen (ett specialfall av övning 3.9)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Den fås snabbt fram med `ones(6)+eye(6)`

1. Vilka är egenvärdena till matrisen? (De är faktiskt heltal.)
   Svar: ____

2. Vilka multipliciteter har egenvärdena?
   Svar: ____

3. Ange en egenvektor som svarar mot det största egenvärdet? Förenkla Matlabs svar.
   Svar: ____

Kontrollera att kolonnerna i S-matrisen är egenvektorer till A. Man kan plocka fram t ex kolonn 3 med `S(:,3)`. Sätt alltså `s3=S(:,3)` och bilda `A*s3`. Gör samma sak för den kolonn som svarar mot det största egenvärdet.

Vi skall nu ge oss på en ganska stor matris.

1.6 (I mån av tid.) Bilda en 100×100-matris med slumpvis valda element med kommandot `A=randn(100)`. Låt Matlab diagonalisera den. Plocka fram egenvärdena genom `lambda=diag(D)`. Lägg märke till att en del egenvärden är reella och att de andra förekommer i komplexkonjugerade par.

Vilket är egenvärde nummer 37 (kalla det `lambda37`) och vilken är motsvarande egenvektor (`s37`)? Kontrollera att `fel37=A*s37-lambda37*s37` är litet. Eftersom denna vektor har hundra element, så är det besvärligt att se på dem ett i taget. För att se att vektorn är liten kan man till exempel i stället bilda summan av absolutbeloppen av elementen (med `sum(abs())`). Summan av absolutbeloppen för `fel37` blev: ____________________

1.7 (I mån av tid.) Som bekant är egenvärdenas summa lika med spåret för matrisen (diagonalelementens summa) och egenvärdenas produkt är lika med determinanten för matrisen. Testa detta för den stora matrisen i föregående problem.

Bilda spår och determinant av A med kommandona `trace(A)` resp `det(A)` och jämför med egenvärdenas summa `sum(lambda)` respektive produkt `prod(lambda)`. På grund av numeriska avrundningsfel kan skillnade mellan egenvärdenas produkt och `det(A)` ibland bli ganska stor.

Storlek av matriser och vektorer

Vid numerisk räkning får man t ex inte *exakta* värden på egenvektorer och egenvärden (och det är i regel omöjligt att få sådana värden med ändligt räknearbete). I stället för att få ekvationen $As = \lambda s$ exakt uppfylld får vi nöja oss med att $As - \lambda s$

blir *litet*. En vektor eller matris har ju flera element, och det är inte entydigt givet hur man skall mäta dess storlek. Matlab har en funktion `norm` som man kan använda för detta ändamål.

1.8 (Om du gjort 1.6 .) Kontrollera nu i ett numeriskt fall att $S^{-1}AS = D$ och att $As_j = \lambda_j s_j$ genom att beräkna `norm(inv(S)*A*S-D)` och `norm(A*s37-lambda37*s37)` för matrisen A i 1.6.

Svar: ______________________________

Icke diagonaliserbara matriser

Matlab kan inte skilja på matriser som är diagonaliserbara och sådana som inte är det, utan finner en approximativ diagonalisering även av icke diagonaliserbara.

1.9 Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

från övning 3.2f är ej diagonaliserbar. Låt Matlab försöka diagonalisera den med `[S,D]=eig(A)`. Titta noga på matrisen `S`, med `format long`. Ser den inverterbar ut? Vad blir `det(S)`? Svar: ______________________________

Vad händer om man försöker bilda $S^{-1}AS$? Svar: ______________________________

1.10 (I mån av tid.) Försök att diagonalisera matrisen i övning 3.16. Vad blir `det(S)`? Svar: ____________________ Verkar kolonnerna i `S` linjärt oberoende? Svar: _____

Symmetriska och ortogonala matriser (I mån av tid)

Transponeringsoperationen i Matlab betecknas med prim (`'`). Närmare bestämt fås A^T genom `A.'`. Utelämnas punkten får man *hermitesk konjugering* vilket innebär transponering *och* komplex konjugering. (Detta är den viktigaste operationen för komplexa matriser.) För matriser med reella element blir det ingen skillnad.

1.11 (I mån av tid.) Låt[2]

$$A = \begin{bmatrix} 1-3i & 2+i \\ 4-5i & 6-7i \end{bmatrix}$$

Bilda `A'` och `A.'`.

Som du kommer att se i teorin i kapitel 6 har reella symmetriska matriser tre viktiga egenskaper:

1. de är alltid diagonaliserbara,

2. egenvärdena är alltid reella,

3. den diagonaliserande matrisen S kan alltid väljas *ortogonal*, vilket betyder att `inv(S)=S'` eller ekvivalent att `S*S' = eye(size(S))`

[2] $1-3i$ matas in som 1-3i utan mellanrum. Dock ska det vara mellanrum till nästa element $2+i$.

1.12 (I mån av tid.) Diagonalisera matrisen i övning 6.30 och kontrollera att den erhållna matrisen `S` är ortogonal. Bilda först `S*S'` och `S'*S` och testa för säkerhets skull sedan `norm(S'*S-eye(3))` och `norm(S*S'-eye(3))`.

Påminnelse: `eye(n)` betyder enhetsmatrisen av ordning n. Namnet kommer av det engelska uttalet av bokstaven I.

Vi skall nu kontrollera teorin för en mycket större symmetrisk matris.

1.13 (I mån av tid) Bilda en slumpmatris av storlek 100×100 med `B=randn(100)`. Genom att ta $A = B + B^T$, alltså `A=B+B'`, får vi en *symmetrisk* slumpmatris av denna storlek. Beräkna nu på vanligt sätt egenvärden och egenvektorer till `A`. En vektor med egenvärdena i fås med `lambda=diag(D)` och vi kan testa att de är reella med `norm(imag(lambda))`. Normen blir ____________________ Kontrollera sedan som ovan att det erhållna `S`-et är ortogonalt och att `inv(S)*A*S-D` är litet, till exempel med `norm(S'*S-eye(100))` respektive `norm(S'*A*S-D)`. Vilka värden fick du? ____

Maple

Det är relativt ovanligt att egenvärdena till en matris kan beräknas exakt. Det gäller i huvudsak om de är rationella tal eller bara innehåller enkla rotuttryck. Orsaken är vanligen symmetriegenskaper hos det praktiska problem som gett upphov till matrisen. I sådana fall är Maple ett bra hjälpmedel. Maples matriser kan såväl vara symboliska som numeriska.

Matriser

Starta `Maple 16` eller senare version.

Anmärking: Om du vill kunna skriva in dina kommandon på samma sätt som i denna handledning, dvs på en rad kan du göra på följande sätt: Börja med `Help>Startup Dialog...>Start with Blank Worksheet`. Första gången behövs också engångsinställningen `Tools>Options>Display>Input display>Maple Notation` och avslutet `Apply Globally`. Nästa gång du startar Maple behöver du bara välja `Blank Woorksheet`. Notera att med detta inskrivningssätt måste varje kommando avslutas med semikolon eller kolon.

För att lätt kunna räkna med matriser i Maple bör man först ge t ex kommandot `with(linalg)`. Ett sätt att ange en matris i Maple är med kommandot `matrix`. Man anger först antalet rader, sedan kolonner och till slut matriselementen som en lista, inom klammer `[ ]`.

1.14 Slå in ”standardmatrisen” genom

```
A := matrix(2,2,[1,2,4,3])
```

Definiera matrisen i övning 6.29 genom kommandot

```
B := matrix(3,3,[2,1,3, 1,2,3, 3,3,20])
```

(Mellanslagen i listan är praktiska för att man skall se var en ny rad börjar men inte nödvändiga för Maple.)

Matrisens egenvärden och motsvarande egenvektorer kan fås med kommandot `eigenvects`. Skriv i Maple `?eigenvects` och studera de röda exemplen i slutet av sidan. Notera att utdata i grova drag har strukturen

[egenvärdet λ, multiplicitet, linjärt oberoende egenvektorer hörande till λ]

1.15 Pröva kommandona `eigenvects(A)` och `eigenvects(B)`. Vad betyder de olika delarna av Maples svar? ______________________________

____

1.16 (I mån av tid.) Vi lägger också in en större, symbolisk matris med kemisk anknytning (från övning 6.34). Definiera matrisfunktionen `H` genom

```
H :=(a,b) -> matrix(6,6,[a,b,0,0,0,b, b,a,b,0,0,0, 0,b,a,b,0,0,
                0,0,b,a,b,0, 0,0,0,b,a,b, b,0,0,0,b,a])
```

eller

```
H:=(a,b)->band([b,0,0,0,b,a,b,0,0,0,b],6)
```

Bestäm egenvärden och egenvektorer till matrisen `H(a,b)`. Är matrisen diagonaliserbar?

Svar: ______________________________

____

____

____

1.17 Låt nu Maple försöka med matrisen från uppgift 1.5 ovan. Du kan skriva in matrisen med kommandot `A:=evalm(matrix(6,6,1)+diag(1$6))` Hur många oberoende egenvektorer har den? Svar: ______________________________

Om du vill kontrollera att egenvektorerna verkligen är linjärt oberoende så kan du förfara på följande sätt:

```
egenv:=eigenvects(A)
S:= concat(op(egenv[1][3]),op(egenv[2][3]))
det(S)
```

Hur är matrisen `S` uppbyggd?______________________________

Var egenvektorerna linjärt beroende? Svar: __________

1.18 (Om du har gott om tid.) Försök även med matrisen från uppgift 1.9.

Matrisoperationer

Matrisoperationer tecknas på samma sätt som vanliga algebraiska operationer med det undantaget att matrismultiplikationen måste skrivas `&*` i stället för bara `*`. För att få Maple att utföra operationerna måste man dessutom ge kommandot `evalm`.

1.19 Testa de föregående beräkningarna för matrisen B i uppgift 1.14 ovan genom att bilda en matris S vars kolonner är egenvektorerna till B. Undersök sedan om S diagonaliserar B med `evalm(S^(-1)&*B&*S)`

Vi skall nu beräkna resolventen till några matriser. Enhetsmatrisen av ordning n erhålles lättast med `diag(1$n)`.

1.20 Bestäm resolventen till matrisen B genom

```
id3:=diag(1$3)
resolvent:=evalm((s*id3-B)^(-1))
```

Beräkna även det karakteristiska polynomet med `det((s*id3-B))` eller `charpoly(B,s)` och jämför med nämnarna i resolventmatrisen. Vilken är resolventens nämnare? ______________________________________

1.21 Lös övning 4.8 a) med hjälp av sats 4.6 sidan 73. För att med Maple bestämma en generaliserat stationär lösning till $\dfrac{dx}{dt} = Ax + fe^{st}$ skriver du

```
assume(t,real)
sol:=evalm(inverse(s-A)&*f*exp(s*t))
map(Re,sol)
```

För att lösa övning 4.8 a) behöver du givetvis först skriva in matriserna A och f och talet s. Maplekommandot `map` behövs eftersom realdelen ska beräknas av en matris `sol`.

1.22 (Om du har gott om tid.) Bestäm resolventmatrisen till matrisen i övning 3.16.

Exponentialmatrisen

Matlab kan beräkna exponentialmatriser numeriskt med kommandot `expm`, men detta har ganska begränsat intresse. Mer givande är att använda Maple, där kommandot är `exponential`.

1.23 Kontrollera svaren i uppgift `5.1abcde` i övningshäftet med Maple. Gör på detta sätt (för `d`):

```
Ad := matrix(2,2,[-2,-1,1,-2])
exponential(Ad*t)
```

eller

```
Ad := matrix(2,2,[-2,-1,1,-2])
exponential(Ad,t)
```

Jämför även med Maple `exp`

```
evalm(exp(Ad*t))
```

Vad gör detta kommando?__________ Lös sedan även `5.25e` med Maple.

Studera exponentialmatrisen för matrisen i övning `5.1d`. Avläs i exponentialmatrisen egenvärdena till matrisen i `5.1d`. Samma uppgift för `5.25e`. Svar:______

____

För att derivera matriser måste man använda kommandot `map` som har innebörden att dess första argument utförs på varje element i dess andra argument.

1.24 Derivera matrisen

$$A = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

med avseende på t. Använd kommandona

```
A := matrix(2,2,[cos(t),-sin(t),sin(t),cos(t)])
map(diff,A,t)
```

1.25 Exponentialmatrisen $\Phi(t) = e^{tA}$ karakteriseras av differentialekvationen och begynnelsevillkoret

$$\frac{d\Phi}{dt} = A\Phi, \qquad \Phi(0) = I.$$

Jämför sats 5.4.
Kontrollera detta för matrisen i `5.25e`

```
Ae := matrix(3,3,[6,2,-4, ...])
Phi := exponential(Ae*t)
evalm(map(diff,Phi,t)-Ae&*Phi)
```

1.26 Matriserna

$$\begin{bmatrix} 9e^{t} - 8e^{2t} & 6e^{2t} - 6e^{t} \\ 12e^{t} - 12e^{2t} & 9e^{2t} - 8e^{t} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} (1+2t)e^{3t} & -te^{3t} \\ 4te^{3t} & (1-2t)e^{3t} \end{bmatrix}, \quad \text{och}$$

$$\begin{bmatrix} \cos t & -\frac{1}{2}\sin t & -\frac{1}{2}\sin t \\ \sin t & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t \\ \sin t & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t \end{bmatrix}$$

är alla exponentialmatriser av typen e^{tA} för olika matriser A.

Bestäm – utan att först beräkna A – egenvärdena till respektive A-matris och avgör om A-matrisen i fråga är diagonaliserbar. Be handledaren att granska dina motiveringar!

Bestäm sedan respektive matris A genom att derivera respektive exponentialmatris och därefter sätta in $t = 0$. Använd dessa A-matriser och kontrollera dina svar ovan.

1.27 På en ö finns 350 får. Vid räkningens början finns det x_0 får i område A, y_0 får i område B och z_0 i C. Djuren rör sig mellan områdena enligt följande modell (inga föds eller dör): Under en tidsperiod T har

- 60 % av fåren i A stannat kvar i A, 20 % har gått till B och 20 % har gått till C
- 70 % av fåren i B stannat kvar i B, 10 % har gått till A och 20 % har gått till C
- 50 % av fåren i C stannat kvar i C, 40 % har gått till A och 10 % har gått till B

Låt x_n, y_n och z_n beteckna antalet får i regionerna A, B resp C efter tiden nT. Då gäller

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0.6x_n + 0.1y_n + 0.4z_n \\ y_{n+1} = 0.2x_n + 0.7y_n + 0.1z_n \\ z_{n+1} = 0.2x_n + 0.2y_n + 0.5z_n \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Hur många får finns efter lång tid i respektive område?

Sätt $\mathsf{v}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$ och $\mathsf{v}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$. Skriv systemet på matrisform $\mathsf{v}_{n+1} = \mathsf{A}\mathsf{v}_n$. Använd Maple. Skriv in matrisen A i Maple. Beräkna egenvärden och egenvektorer. Diagonalisera systemmatrisen och använd diagonaliseringen för att beräkna $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{A}^n \mathsf{v}_0$. Gränsvärdet lämnar information om antalet får i respektive område.

Mera i detalj kan du göra på följande sätt:

```
A:=1/10*matrix(3,3,[6,1, fortsätt ]); #Systemmatrisen
egenv:=eigenvects(A)
S1:=op(egenv[1][3]);S2:=op(egenv[2][3]);S3:=op(egenv[3][3])
#Extrahera egenvektorerna ur egenv.
S:=concat(S1,S2,S3);#Diagonaliserande matris
Di:=evalm(S^(-1)&*A&*S)
Dihattn:=diag(Di[1,1]^n,Di[2,2]^n,Di[3,3]^n)
v0:=matrix(3,1,[x0,y0,z0])
evalm(S&*Dihattn&*S^(-1)&*v0); #Beräkning av A^n*v0
map(limit,%,n=infinity);#Svaret kan nu avläsas.
#Tänk på att x0+y0+z0=350.
```

Vad är förhållandet mellan koordinaterna i en egenvektor hörande till det största egenvärdet? Svar: ____________________ Vad är förhållandet mellan antalet får i respektive område? Svar: ____________________ Samband? __________

(Säg att $\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2$ och e_3 är egenvektorer med egenvektorerna λ_1, λ_2 respektive λ_3 till A. Egenvektorerna är linjärt oberoende, varför det finns tal c_1, c_2 och c_3 sådana att $\mathsf{v}_0 = c_1\mathsf{e}_1 + c_2\mathsf{e}_2 + c_3\mathsf{e}_3$. Därav följer att

$$\mathsf{A}^n\mathsf{v}_0 = c_1\lambda_1^n\mathsf{e}_1 + c_2\lambda_2^n\mathsf{e}_2 + c_3\lambda_3^n\mathsf{e}_3\,.$$

Om λ_1 är det egenvärde som har störst absolutbelopp så får vi att $\mathsf{A}^n\mathsf{v}_0 \approx c_1\lambda_1^n\mathsf{e}_1$ då n är stort. Vi ser nu hur förhållandet $x_n : y_n : z_n$ är detsamma som mellan koordinaterna i egenvektorn e_1.)

Anmärkning. Problemet kan i Maple också lösas med `rsolve` men då ser man inte egenvärdenas inverkan.

Litteraturförteckning

Pärt-Enander, E. & Sjöberg, A. (2001), *Användarhandledning för Matlab 6*, Institutionen för informationsteknologi, Uppsala Universitet, Uppsala.

Heck, A. (2003), *Introduction to Maple*, Springer.

Sigmon, K. (1993), *Matlab Primer*, Department of Mathematics, University of Florida, Gainsville,Fl.

Spanne, S. (1997), *Lineära system*, KFS.

Werner, C.G. (2002), *Maplehandboken*, Matematikavdelningen (NF), Lund.