System och transformer
Tilläggsmaterial

1 Strukturen hos e^{tA}.

Då matrisen A är diagonaliserbar vet vi att varje element i e^{tA} är en lineärkombination av termer av typen $e^{\lambda t}$, där λ är egenvärden till A. Då A inte är diagonaliserbar förekommer framför $e^{\lambda t}$ inte bara en konstant utan polynom $p(t)$, där $\operatorname{grad} p <$ multipliciteten hos egenvärdet λ. Mera exakt kan vi här citera sats 5.6.

Sats 5.6. Varje element i exponentialmatrisen e^{tA} är en lineärkombination av termer av formen $t^l e^{\lambda t}$, där λ genomlöper spektrum av A och l är mindre än multipliciteten för λ.

Vi kastar oss inte över att allmänt bevis direkt utan tittar först på

Sats 5.4. Låt $\Phi(t)$ vara en $n \times n$-matris sådan att

$$\begin{cases} \dfrac{d\Phi}{dt} = A\Phi \\ \Phi(0) = I \end{cases}$$

Då är $\Phi(t) = e^{tA}$.

Bevis: Vi multiplicerar båda leden i $\dfrac{d\Phi}{dt} - A\Phi = 0$ med en integrerande faktor e^{-tA}. Då gäller

$$\frac{d\Phi}{dt} - A\Phi = 0 \Longleftrightarrow e^{-tA}\frac{d\Phi}{dt} - e^{-tA}A\Phi = 0 \Longleftrightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{-tA}\Phi(t)\right) = 0 \Longleftrightarrow e^{-tA}\Phi(t) = C$$

där C är en konstant $n \times n$-matris. Men $\Phi(0) = I$ varför $t = 0$ ger att $C = I$. Alltså är

$$e^{-tA}\Phi(t) = I \Longleftrightarrow \Phi(t) = e^{tA}$$

Beviset är klart.

Innan vi går över till sats 5.6 behöver vi repetera litet lineär algebra. Se sidan 74 - 75 i boken i Lineära system. Om matrisen A är inverterbar kan inversen beräknas via

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$$

där adj betyder adjunkten. Hur beräknas $\operatorname{adj} A$? Låt mig påminna om adj i fallet då A är en 3×3-matris. Då är

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} D_{11} & -D_{12} & D_{13} \\ -D_{21} & D_{22} & -D_{23} \\ D_{31} & -D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}^T \tag{1}$$

där D_{jk} är den *determinant* som återstår då man i A har strukit rad j och kolonn k. Notera transponeringen T i (1).

Ex 1. Säg att $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ med $\det A = ad - bc \neq 0$. Då är

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Bekant?

Säg nu att A är en $n \times n$-matris. Då är $\det(sI - A)$ ett polynom i s av grad n och elementen i $\operatorname{adj}(sI - A)$ blir polynom av högst grad $n-1$. Inversen till $sI - A$, dvs resolventen $(sI - A)^{-1}$ ges då av

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} \operatorname{adj}(sI - A)$$

Elementen i resolventen blir då rationella funktioner där nämnarens gradtal är minst en enhet större än täljarens.

Ex 2. Låt γ vara en positivt orienterad sluten kurva som innesluter alla egenvärden till A. Inspirerade av Cauchys integralformel studerar vi funktionen

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (sI - A)^{-1} e^{ts} \, ds$$

I denna integral är integranden en $n \times n$-matris. Vi integrerar elementvis. Vi ska nu med hjälp av sats 5.4 visa att $\Phi(t) = e^{tA}$.
Först ser vi att

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (sI - A)^{-1} s e^{ts} \, ds$$

Sätt sedan $B = sI - A$. Då blir $A = sI - B$ och

$$A\Phi(t) = A \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (sI - A)^{-1} e^{ts} \, ds = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (sI - B) B^{-1} e^{ts} \, ds = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (sI - A)^{-1} s e^{ts} \, ds +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \underbrace{-I e^{ts}}_{\text{analytisk}} \, ds = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (sI - A)^{-1} s e^{ts} \, ds + 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (sI - A)^{-1} s e^{ts} \, ds$$

Den integral som har analytisk integrand blir 0 enligt Cauchys integralsats. Vi har visat att

$$\frac{d\Phi}{dt} = A\Phi$$

dvs det första villkoret i sats 5.4.

Det återstår att visa att $\Phi(0) = I$. Vi konstaterar först att om origo $s = 0$ inte ligger innanför kurvan γ så kan vi vidga kurvan så att origo kommer innanför γ. Eftersom alla singulariteter till integranden, dvs egenvärdena till A, ligger innanför γ ger Cauchys integralsats att integralen inte ändras.

$$\Phi(0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma (s\mathsf{I}-\mathsf{A})^{-1}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma (s\mathsf{I}-\mathsf{A})^{-1}\frac{1}{s}\left((s\mathsf{I}-\mathsf{A})+\mathsf{A}\right)\,ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{1}{s}\mathsf{I}\,ds + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma (s\mathsf{I}-\mathsf{A})^{-1}\frac{1}{s}\mathsf{A}\,ds = \mathsf{I} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma (s\mathsf{I}-\mathsf{A})^{-1}\frac{1}{s}\mathsf{A}\,ds$$

Men den återsående integralen är 0. Varför? Jo varje element i integranden

$$(s\mathsf{I}-\mathsf{A})^{-1}\frac{1}{s}\mathsf{A} = \frac{1}{s\cdot\det(s\mathsf{I}-\mathsf{A})}\operatorname{adj}(s\mathsf{I}-\mathsf{A})\mathsf{A}$$

är en rationell funktion med minst två enheter större gradtal i nämnaren än i täljaren. Alla singulariteter ligger innanför kurvan γ. I övning 11.19 a) i Funktionsteorins övningshäfte visade vi att under dessa betingelser blir integralen 0.

Beviset är klart.

Bevis av sats 5.6: Vi har just visat att

$$e^{t\mathsf{A}} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma (s\mathsf{I}-\mathsf{A})^{-1}e^{ts}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{1}{\det(s\mathsf{I}-\mathsf{A})}\operatorname{adj}(s\mathsf{I}-\mathsf{A})e^{ts}\,ds$$

Vi kan tänka oss att beräkna integralen med residykalkyl. Om A inte är diagonaliserbar är minst ett egenvärde - säg λ - multipelt. Då finns faktorn $(s-\lambda)^m$, där $m > 1$, i $\det(s\mathsf{I}-\mathsf{A})$. Alltså är $s=\lambda$ en pol av ordning högst m. Enligt residyregel 1 kommer då bl a e^{ts} att deriveras högst $m-1$ gånger. Vid varje derivation hamnar en faktor t framför exponentialfunktionen. Från polen $s=\lambda$ får vi alltså ett bidrag av formen $p(t)e^{t\lambda}$, där p är ett polynom i t med grad $< m$.
Beviset är klart.

2 exp(A): Uppgift nr 5, tentamen 2000-12-12

För en viss matris A är

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{-t} - 12t & -e^{-t} + 1 - 6t & -3e^{-t} + 3 - 6t \\ -3e^{-t} + 3 + 42t & 3e^{-t} - 2 + 21t & 9e^{-t} - 9 + 21t \\ e^{-t} - 1 - 18t & -e^{-t} + 1 - 9t & -3e^{-t} + 4 - 9t \end{bmatrix}.$$

a) Är A diagonaliserbar?

b) Är A inverterbar?

c) Lös systemet

$$\frac{dx}{dt} = Ax\ , \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

d) Är systemet $\dfrac{dx}{dt} = Ax$ stabilt, neutralt stabilt eller instabilt?

e) Har systemet

$$\frac{dx}{dt} = Ax + e^{-2t}f$$

där $f^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ någon generaliserat stationär lösning? Bestäm i så fall denna.

Svar:

Matrisen A har egenvärdena $0, 0, -1$.

a) Nej, ty exponentialmatrisen innehåller termer av typ te^{0t}.

b) Nej, ty $\det A = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0$.

c) Systemet har lösningen

$$x(t) = e^{tA}x(0) = e^{tA}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - 2 \\ -6e^{-t} + 7 \\ 2e^{-t} - 3 \end{bmatrix}.$$

d) Systemet är instabilt. Exempelvis ger begynnelsevärdet $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ lösningen $x(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} - 12t & -3e^{-t} - 2 - 21t & e^{-t} - 1 - 18t \end{bmatrix}^T$. Denna lösning är ej begränsad för stora t.

e) Ja eftersom -2 ej är egenvärde till A. Den generaliserat stationära lösningen (då $s = -2$) är $x_{\text{gstat}}(t) = (-2I - A)^{-1}fe^{-2t}$. Se sats 4.6 sidan 73. Eftersom $f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ så är $(-2I - A)^{-1}f$ första kolonnen i matrisen $(-2I - A)^{-1}$. För att beräkna den första kolonnen kan du använda adjunktmetoden. Då fås

$$x_{\text{gstat}}(t) = e^{-2t}\begin{bmatrix} -4 \\ 12 \\ -5 \end{bmatrix}$$

En annan (möjligen enklare) lösning på delproblem e) fås i kapitel 14 via sats 14.20.

3 Några tidsdiskreta exempel

Exempel 1. Betrakta en population av något slag t ex människor eller kaniner e dyl. Vi antar att andelen honor är lika med andelen hanar. Vi betraktar därför bara honor.
Dela in en maximal livslängd i $n+1$ lika långa intervall, säg 1 år långa. Dela också in tiden i lika långa tidsintervall, säg 1 år långa. Numrera tidsintervallen. Intervallet $[0,1]$ får vara tidsintervall 0 medan intervallet $[1,2]$ blir tidsintervall 1. Intervall k blir $[k,k+1]$. Låt $x_i(k), i = 0,1,\ldots,n$, beteckna antalet individer i den i:te åldersgruppen under tidsintervall k. En viss del av $x_i(k)$ överlever till nästa tidsintervall. Säg alltså att

$$x_{i+1}(k+1) = \beta_i x_i(k), \quad i = 0,1,2,\ldots,n-1$$

Överlevnadsfaktorerna β_i kan bestämmas statistiskt.
Låt oss anta att medlemmarna i alla åldersgrupper är fertila. Till $x_0(k+1)$ bidrar alltså alla individer under det föregående tidsintervallet. Alltså gäller att

$$x_0(k+1) = \alpha_0 x_0(k) + \alpha_1 x_1(k) + \alpha_2 x_2(k) + \ldots + \alpha_n x_n(k)$$

I matrisspråk kan vi skriva att

$$\begin{bmatrix} x_0(k+1) \\ x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ \beta_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \beta_{n-1} & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_0(k) \\ x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}}_{v_k}$$

Kort kan vi skriva $v_{k+1} = Av_k$.

Exempel 2. Två handlare X och Y säljer samma vara. De justerar sina priser varje månad. Då X sätter priset x_n för månad n utgår han från sitt pris x_{n-1} från föregående månad men justerar priset med ett belopp, som är proportionellt mot prisskillnaden $x_{n-1} - y_{n-1}$. Här är y_{n-1} det pris på varan, som Y har hållit under månad $n-1$. Handlare Y följer samma principer för sin prissättning. Alltså gäller

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} - 2\alpha(x_{n-1} - y_{n-1}) \\ y_n = y_{n-1} - 2\beta(y_{n-1} - x_{n-1}) \end{cases} \quad n = 1,2,3,\ldots \tag{4}$$

Här är 2α och 2β positiva proportionalitetskonstanter.
Med

$$v_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad A = \begin{bmatrix} 1-2\alpha & 2\alpha \\ 2\beta & 1-2\beta \end{bmatrix}$$

kan (4) skrivas som

$$v_n = Av_{n-1}, \; n = 1,2,3,\ldots$$

Exempel 3. År 2000 publicerade Lars Gårding artikeln ”A simple model for the interplay of predators, rodents and food” i J. Theor. Biol. Där presenterar han en tidsdiskret, linjär

modell för populationsvariationen från år till år av två arter, som lever i ett predator-bytesförhållande under stabila förhållanden, t ex lämlar och fjällrävar.
Låt $P(k)$ vara antalet predatorer år k och låt $R(k)$ beteckna antalet bytesdjur år k. Med $x_1(k) = P(k) - M$, $x_2(k) = R(k) - M$, där M är en konstant, leder hans modell till det linjära systemet

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= (1-a)x_1(k) + ax_2(k) \\ x_2(k+1) &= -dx_1(k) + (1-b)x_2(k) + (\frac{b}{a} - b)c \end{cases}$$

av differensekvationer. I systemet är a, b, c och $d = 1 - b + \frac{b}{a}$ konstanter. Exempelvis motsvarar $\frac{1}{a}$ ungefär medellivslängden i år hos predatorerna.

Exempel 4. Ett första försök till nationalekonomisk modell.
Sätt

- $I_k =$ "national income" år k
- $C_k =$ "consumer expenditure" år k
- $P_k =$ "private investment" år k
- $G_k =$ "government expenditure" år k

Antaganden

$$I_k = C_k + P_k + G_k$$
$$C_{k+1} = aI_k, \quad \text{där} \quad 0 < a < 1$$
$$P_{k+1} = b(C_{k+1} - C_k), \quad \text{där} \quad 0 < b \leq 1$$

Detta ger att

$$C_{k+1} = a(C_k + P_k + G_k)$$

och

$$P_{k+1} = b(aI_k - C_k) = b(a(C_k + P_k + G_k) - C_k) = (ab - b)C_k + abP_k + abG_k$$

Om vi uttrycker oss i matrisspråk gäller alltså

$$\begin{bmatrix} C_{k+1} \\ P_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a \\ ab - b & ab \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_k \\ P_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ ab \end{bmatrix} G_k \tag{5}$$

$$I_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_k \\ P_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} G_k \tag{6}$$

Vi kan alltså betrakta G_k som insignal, C_k och P_k som tillståndsvariabler och I_k som utsignal.

Oavsett om egenvärdena till systemmatrisen $A = \begin{bmatrix} a & a \\ ab - b & ab \end{bmatrix}$ blir reella eller komplexa gäller att deras absolutbelopp < 1. Denna information kan –som vi kommer att se i denna kurs– vara viktig då vi ska undersöka vad som händer då $k \to \infty$.

Låt $w(k), x(k)$ och $y(k)$ vara kolonnmatriser. Sambandet mellan insignalerna $w(k)$ och utsignalerna $y(k)$ i ett tidsdiskret lineärt system regleras av de lineära tillståndsekvationerna

$$\begin{cases} x(k+1) & = & Ax(k) + Bw(k) \\ y(k) & = & Cx(k) + Dw(k) \end{cases}$$

Jämför (2), (3), (5) och (6) ovan.

I denna kurs kommer vi att lära oss att lösa system av differensekvationer av typ
$x(k+1) = Ax(k) + Bw(k)$ - åtminstone då systemmatrisen A är diagonaliserbar.

4 Några tidsdiskreta övningsuppgifter

Td 1. Två handlare X och Y säljer samma vara. De justerar sina priser varje månad. Då X sätter priset x_n för månad n utgår han från sitt pris x_{n-1} från föregående månad men justerar priset med ett belopp, som är proportionellt mot prisskillnaden $x_{n-1} - y_{n-1}$. Här är y_{n-1} det pris på varan, som Y har hållit under månad $n-1$. Handlare Y följer samma principer för sin prissättning. Alltså gäller

$$\begin{cases} x_n &= x_{n-1} - 2\alpha(x_{n-1} - y_{n-1}) \\ y_n &= y_{n-1} - 2\beta(y_{n-1} - x_{n-1}) \end{cases} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{1}$$

Här är 2α och 2β positiva proportionalitetskonstanter.
Med

$$\mathsf{v}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} \qquad \text{och} \qquad \mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1-2\alpha & 2\alpha \\ 2\beta & 1-2\beta \end{bmatrix}$$

kan (1) skrivas som

$$\mathsf{v}_n = \mathsf{A}\mathsf{v}_{n-1}, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Stegvis ska vi bestämma v_n utifrån förutsättningen att priserna v_0 månad 0 är kända.

a) Bestäm egenvärden och egenvektorer till A.

Tips: Sätt $\lambda - 1$ inom en parentes vid beräkningen av $\det(\lambda \mathsf{I} - \mathsf{A})$.

b) Låt S_1 och S_2 vara två lineärt oberoende egenvektorer till A. Bestäm tal c_1 och c_2 sådana att $\mathsf{v}_0 = c_1\mathsf{S}_1 + c_2\mathsf{S}_2$.

c) Lös (1).

d) Hur ser prisbilden ut efter ”lång tid” om $0 < \alpha + \beta < 1$.

Td 2. I Funktionsteori har du lärt dig att lösa exempelvis rekursionsekvationen $x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 0$ med begynnelsevärdena $x_0 = 1, x_1 = 7$. Vi ska nu stoppa in problemet i en ”matriskostym”. Uppenbarligen är

$$\begin{cases} x_n &= 5x_{n-1} - 6x_{n-2} \\ x_{n-1} &= x_{n-1} \end{cases} \qquad n = 2, 3, \ldots \tag{2}$$

Med

$$\mathsf{v}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \text{och} \qquad \mathsf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

kan (2) skrivas som $\mathsf{v}_n = \mathsf{A}\mathsf{v}_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$ Begynnelsevärdet $x_0 = 1, x_1 = 7$ svarar mot att $\mathsf{v}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$. Bestäm egenvärden och egenvektorer till A, skriv v_1 som en linjärkombination av egenvektorerna. Avläs x_n.

Td 3. Ett system av differensekvationer ges av

$$\begin{cases} x_{k+1} = 0.1x_k + ay_k \\ y_{k+1} = 0.5x_k + 0.5y_k \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Avgör om systemet är stabilt, neutralt stabilt eller instabilt då
a) $a = \frac{6}{25}$ **b)** $a = \frac{9}{10}$ **c)** $a = \frac{6}{5}$.

Td 4. Bestäm en approximation till lösningen av systemet

$$\begin{cases} x_{k+1} = \frac{1}{2}x_k + \frac{1}{8}y_k + 2^k \\ y_{k+1} = \frac{1}{2}x_k + \frac{1}{2}y_k - 2 \cdot 2^k \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

då k är stort.

Td 5. Lös det tidsdiskreta begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + 2x_2(k) - 2 \cdot 2^k \\ x_2(k+1) = 4x_1(k) + 3x_2(k) - 10 \cdot 2^k \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

med begynnelsevärdena $x_1(0) = 6, x_2(0) = 0$. Lös problemet antingen

- genom att först lösa motsvarande homogena system och sedan till denna lösning addera någon partikulärlösning. Den senare kan erhållas som en generaliserat stationär lösning

  eller

- genom att använda uttrycket $\mathsf{x}(k) = \mathsf{A}^k \mathsf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathsf{A}^{k-1-j} \mathsf{B} \mathsf{w}(j)$, för $k = 1, 2, 3, \ldots$ Jämför övning 5.4.

Td 6. År 2000 publicerade Lars Gårding artikeln ”A simple model for the interplay of predators, rodents and food” i J. Theor. Biol. Där presenterar han en tidsdiskret, linjär modell för populationsvariationen från år till år av två arter, som lever i ett predator-bytesförhållande under stabila förhållanden, t ex lämlar och fjällrävar. Låt $P(k)$ vara antalet predatorer år k och låt $R(k)$ beteckna antalet bytesdjur år k. Med $x_1(k) = P(k) - M$, $x_2(k) = R(k) - M$, där M är en konstant, leder hans modell till det linjära systemet

$$\begin{cases} x_1(k+1) = (1-a)x_1(k) + ax_2(k) \\ x_2(k+1) = -dx_1(k) + (1-b)x_2(k) + (\frac{b}{a} - b)c \end{cases} \tag{7}$$

av differensekvationer. I systemet är a, b, c och $d = 1 - b + \frac{b}{a}$ konstanter. Exempelvis motsvarar $\frac{1}{a}$ ungefär medellivslängden i år hos predatorerna.

I fortsättningen av denna uppgift gäller att $a = 0.5, b = 1.5$ och $c = 2000$.

a) Bestäm en konstant partikulärlösning till (1).

b) Bestäm den allmänna lösningen till (1). (Svaret behöver inte vara på reell form.)

c) Vad händer då $k \to \infty$? Dör alla bytesdjur ut eller dör alla predatorer ut eller oscillerar antalet djur eller sker något annat?

Svar:

Td 1 a) Egenvärdena är $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 1 - 2\alpha - 2\beta$. Motsvarande egenvektorer är $\mathsf{S}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\mathsf{S}_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\beta \end{bmatrix}$.

b) $c_1 = \dfrac{\beta x_0 + \alpha y_0}{\alpha + \beta}$ och $c_2 = \dfrac{x_0 - y_0}{\alpha + \beta}$

c) $\begin{cases} x_n = c_1 + c_2 \cdot (1 - 2\alpha - 2\beta)^n \cdot \alpha \\ y_n = c_1 - c_2 \cdot (1 - 2\alpha - 2\beta)^n \cdot \beta \end{cases}$

d) Priserna blir blir båda c_1.

Td 2 Egenvärdena är $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = 3$. Som motsvarande egenvektorer duger $\mathsf{S}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\mathsf{S}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Då blir $\mathsf{v}_1 = -4\mathsf{S}_1 + 5\mathsf{S}_2$ och $\mathsf{v}_n = \mathsf{A}^{n-1}\mathsf{v}_1 = -4\lambda_1^{n-1}\mathsf{S}_1 + 5\lambda_2^{n-1}\mathsf{S}_2$. Vi avläser att $x_n = 5 \cdot 3^n - 4 \cdot 2^n$.

Td 3 **a)** Stabilt **b)** Neutralt stabilt **c)** Instabilt.

Td 4 Systemmatrisens egenvärden är $\dfrac{1}{4}$ och $\dfrac{3}{4}$. Därför kan lösningen till motsvarande homogena system försummas vid sidan av den partikulära lösningen
$x_k = \dfrac{4}{7} \cdot 2^k$, $y_k = -\dfrac{8}{7} \cdot 2^k$

Td 5 $x_1(k) = \dfrac{10}{3}(-1)^k + \dfrac{2}{3}5^k + 2 \cdot 2^k$ och $x_2(k) = -\dfrac{10}{3}(-1)^k + \dfrac{4}{3}5^k + 2 \cdot 2^k$.

Td 6 a) $x_1(k) = x_2(k) = 750,\ k = 0, 1, 2, \ldots$

b) Den allmänna lösningen blir

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = c_1 i^k \mathsf{S}_1 + c_2(-i)^k \mathsf{S}_2 + 750 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

där $\mathsf{S}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 + 2i \end{bmatrix}$ och $\mathsf{S}_2 = \overline{\mathsf{S}_1}$.

c) Både antalet bytesdjur och antalet predatorer oscillerar med perioden 4.

5 Övningsuppgifter med ekonomisk anknytning

E.1 Egenvärden: Leontiefs slutna ekonomimodell

Tre hantverkare skall hjälpa till att renovera varandras hus. Alla tre arbetar sammanlagt 10 dagar enligt följande schema:

- **Snickare:** 3 dagar i sitt hus, 4 hos elektrikern 3 hos rörmokaren.
- **Elektriker:** 5 dagar i sitt hus, 2 hos snickaren, 3 hos rörmokaren.
- **Rörmokare:** 2 dagar i sitt hus, 4 hos elektrikern, 4 hos snickaren.

Av skatteskäl måste de prissätta och deklarera sitt arbete. Hantverkarna bestämmer att ta en dagslön som gör att var och en tjänar exakt lika mycket på sitt arbete som hon/han måste betala för utfört arbete (notera att alla tre måste betala en slant till sig själva). Sätt upp ett ekvationssystem som uttrycker ”utgifter=inkomster” med hjälp av en 3-dimensionell kolonnvektor $X = (S, E, R)^T$, vars element representerar **dags**lönen för respektive hantverkare. Notera att man kan sätta upp en matris (prestationsmatrisen kan vi kalla den) sådan att X är en egenvektor till matrisen med egenvärde 10 (som motsvarar antalet arbetsdagar). Till varje egenvärde finns det oändligt många egenvektorer. Välj **en** egenvektor som ger rimliga dagslöner enligt Lunds arbetsmarknad.

E.2 Differensekvationer: Huslån

(Detta hör snarare till Funktionsteori, men ges här som ”uppvärmning” inför linjära system av differensekvationer)
En nybliven teknolog vill stadga sig och köpa hus. Hon/han hittar ett vackert ”objekt” för M kr och bestämmer sig för att låna pengarna på banken till en årlig ränta r, där $0.01 < r < 0.1$. Teknologens fina och säkra anställning gör att hon/han kan lägga z kr per år på att betala tillbaka lånet. Beloppet z skall räcka till den årliga räntekostnaden plus lite amortering (år efter år betalar man lite mindre ränta och lite större amortering, så att summan blir konstanten z). Hur många år behöver teknologen för att betala av lånet (alt: när måste teknologen vara färdigutbildad och ha fått jobb för att hinna betala tillbaka före pensionsåldern?). Hur mycket har teknologen betalat sammanlagt? Om teknologen möter sitt livs kärlek och flyttar ihop med en partner som har ungefär lika bra jobb, har nu paret $1.5z$ kr per år till att betala tillbaka. Hur många år tar det då? Specificera för $M = 3$ Mkr, $r = 0.04$ och $z = 144$ Tkr. Går det ihop?

E.3 Differensekvationer: arbetslöshetsmodell/Markov

Vid en viss tidpunkt efter en ekonomisk katastrof har ett samhälle 6000 anställda och 4000 arbetslösa. 95% av de anställda behåller sitt jobb efter ett år, medan resten blir arbetslösa. Under samma år hittar bara 20% av de arbetslösa ett nytt jobb. Hur varierar mängden anställda och arbetslösa år efter år? Om samma proportioner blir friställda respektive får nytt arbete varje år, hur ser förhållandet
[# anställda]/[# arbetslösa] ut efter lång tid?

E.4 Differensekvationer: Prissättning och konkurrens

Lidl och Netto (eller SonyEricsson och Nokia) justerar dagligen sina ost- (mobil-) priser beroende på konkurrenten. Säg att:
$L_{n+1} = L_n - a(L_n - N_n)$, dvs att Lidls pris i morgon är dagens pris minus en justering beroende på hur mycket billigare Netto är (dvs att $a > 0$). På samma sätt:
$N_{n+1} = N_n - b(N_n - L_n)$. Kloka ekonomer har bestämt att $a = 0.1$ och $b = 0.2$. Om enhetspriserna i början var 130 kr på Lidl och 100 kr på Netto, hur ser prisbilden ut över tiden? Kommer kedjorna att uppnå något jämviktspris för denna vara?

E.5 Differentialekvationer: prisdynamik

(1-d problem, i repetitionssyfte)
Tillgång och efterfrågan av en enskild vara beror på priset. Säg att $E = a - bP$ (det finns en maximal positiv efterfråga a om varan vore "gratis" och därefter minskar efterfrågan (dvs $b > 0$) beroende på priset P). På samma sätt är $T = c + dP$ (det finns en minimal positiv tillgång c till varan om den är gratis —inte många bryr sig om att producera den—, och därefter ökar produktionen med priset (dvs $d > 0$)). Det är rimligt att anta att $a > c > 0$. De oskrivna marknadslagarna säger att priset ökar då efterfrågan är större än tillgången, vilket kan bl a modelleras som:

$$\frac{dP}{dt} = \lambda(E - T) = \lambda(a - c - P(b + d)),$$

för något $\lambda > 0$ (vi modellerar prisökningen som proportionell till den överskjutande efterfrågan). Bestäm den allmänna lösningen för differentialekvationen och avgör om det finns ett *jämviktspris*, dvs ett pris som varan kommer att uppnå efter lång tid oavsett priset vid begynnelsetidpunkten $t = 0$.

E.6 Differentialekvationer: Walras prismodell

Anta som ovan att priset anpassar sig till den överskjutande efterfrågan. Låt oss nu dessutom förfina beskrivningen av tillgångarna som $T = mF$, dvs anta att varan enbart produceras i fabriker och tillgången (produktionen) är proportionellt till antalet fabriker F på marknaden. Antalet fabriker anpassar sig efter nettovinsten, dvs om varans pris är större än medelproduktionskostnaden C (konstant), så ökar antalet fabriker som producerar varan. Med andra ord:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \mu(a - bP - mF) \\ \frac{dF}{dt} &= \gamma(P - C), \end{aligned}$$

där alla konstanter är positiva. Lös systemet under antagandet att systemmatrisens egenvärden är olika. När är systemmatrisen stabil? Bestäm lösningen då $b = \mu = 1$, $C = 100$, $\gamma = 1/4$, $m = 1/4$ och $a = 103$. Är systemmatrisen stabil med dessa parametervärden? Är systemet insignalstabilt? Hur ser lösningen ut för stora t ? Hur kollapsar ekonomin om t.ex $b = -1$?

E.7 Beckman och Ryders ekonomiska modell

Ekonomer antar att priset av en vara och varans tillgång på marknaden uppnår ett jämviktsläge. Låt π beteckna prisets avvikelse från jämvikten (dvs $\pi > 0$ innebär att varan är dyrare än jämvikten) och låt σ beteckna avvikelsen på tillgången (dvs $\sigma > 0$ innebär att varans tillgång ligger utöver det vanliga). Beckman och Ryders ekonomisk modell beskriver det dynamiska samspelet mellan priset och tillgången som:

$$\begin{aligned} \frac{d\pi}{dt} &= \alpha\pi - \sigma \\ \frac{d\sigma}{dt} &= \pi - \frac{1}{\beta}\sigma, \end{aligned}$$

där α uppskattar hur mycket efterfrågan ändras då priset ökar och β uppskattar hur mycket tillgången ökar då priset ökar. Enligt modellen förväntas "normala" varor ha $\alpha < 0 < \beta$. Bestäm systemets allmänna lösningen då $\alpha + 1/\beta > 2$. Är systemet stabilt?

E.8 Faltning via summan av 2 stokastiska variabler

Anta att vi funderar på att starta ett projekt och är intresserade att ta reda på sannolikheten att vinsten blir mindre än noll. Om denna sannolikhet är större än t ex 50%, så beslutar vi att inte starta projektet. Vinsten influeras av två slumpmässiga effekter. I avsaknad av (och helt oberoende av) ekonomiska katastrofer, föreslår vi att vinsten är normalfördelad kring värdet 1 (mätt i t ex miljarder kronor) och med standard avvikelse 1, dvs man kan ha vilket värde som helst för vinsten, med varierande sannolikhet. Sannolikhetsfördelningen blir

$$vn(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}, \quad x \text{ vinsten.}$$

Den andra effekten är att under projektets levnadstid en ekonomisk katastrof inträffar, vilket vi beskriver som

$$vk(x) = k\delta(x) + (1-k)\delta(x+1).$$

Dvs att det finns en viss chans k att ingen katastrof inträffar och chansen $1-k$ att en katastrof inträffar (oljepriset höjs, riskabla krediter renoveras inte, osv) så att själva vinsten tvingas till värdet -1 (miljardförlust). Om projektet varar i en kort tid kan man förvänta sig att k är nära 1, medan om den varar i flera decennier, kan man vara nästan säker på att en katastrof hinner äga rum (k nära noll). Vinsten är en stokastisk variabel. Man brukar sammanfatta dess uttryck som $V = VN + VK$. Sannolikhetsfördelning för vinsten är alltså den för summan av de två bidragande effekter, dvs att sannolikheten att vinsten antar värdet s är sannolikheten att vn antar värdet σ gånger sannolikheten att vk antar värdet $s-\sigma$, "summerad" (integrerad egentligen) över alla möjliga värden på σ.

(a) Beskriv sannolikhetsfördelningen $\rho_V(s)$ för vinsten V med hjälp av faltningen mellan vn och vk.

(b) Uttryck sannolikheten att vinsten skall vara mindre än noll som en integral, för $k = 0.1$, 0.5 och 0.9. Beräkna numeriska värden med hjälp av t ex Maple.

E.9 Laplacetransform: Dagsvärde av framtida transaktioner

Anta att under loppet av ett projekt kommer man att ha vissa utgifter och intäkter fördelade över tiden. Man vill veta det sammanlagda dagsvärdet av alla transaktioner, dvs hur mycket pengar skall man ha/få idag, så att de med ränta motsvarar transaktionens samlade värde vid tidpunkten där den inträffar. Vi har transaktionerna $c_1, c_2, \cdots, c_N$ vid tidpunkterna $t_1, t_2, \cdots t_N$ (c mäts i kronor: positiv c motsvarar intäkter, negativ c motsvarar utbetalningar. t mäts i år: $t = 1/3$ motsvarar fyra månader, $t = 3.5$ motsvarar 42 månader, osv). Säg att räntesatsen per tidsenhet (år) för in- och utlåning är r, $0 \leq r \leq 0.1$ (dock var $r = 5$ under en vecka i september 1992).
Dagsvärdet för transaktionen j är:

$$v_j = c_j(1 + r)^{-t_j},$$

dvs att om jag har v_j kronor idag och sätter de på banken till räntan r, så kommer de att omvandlas till c_j kronor efter tiden t_j.

(a) Skriv det sammanlagda dagsvärdet D för de samlade transaktionerna $c_1, \cdots, c_N$.

(b) Definiera den *effektiva räntan* $R = \ln(1 + r)$ och skriv om D med hjälp av R och exponentialfunktionen. Kom ihåg att $a^b = e^{b \ln a}$.

(c) Anta att utgifter/intäkter sker kontinuerligt över tiden, från $t = 0$ då projektet börjar, med en viss transaktionstäthet $v(t)$, som i stället för att summeras ihop skall integreras ihop över tiden. Visa att för våra N transaktioner så blir $v(t) = c_1\delta(t - t_1) + \cdots + c_N\delta(t - t_N)$.

(d) Visa att dagsvärdet uppfyller

$$D = [\mathcal{L}(v(t)]_{s=R}$$

där L är Laplacetransformen.

(e) Du är VD på ett stort företag och måste välja mellan två projekt. Du vet att räntan nu är $r = 0.025$ och har räknat ut att projekt nr 1 har
$v_1(t) = (e^{-t} \cos 2t)\theta(t)$ och projekt nr 2 har $v_2(t) = (e^{-2t} \cos t)\theta(t)$. Vilket väljer du?

Svar

E.1 $X^T = (1400, 2200, 1350)$.

E.2 Låt $R = \ln(1 + r)$. Då är $n = -(\frac{1}{R}) \ln(1 - \frac{rM}{z})$. För fallet ensamstående student blir $n = 45.68$, dvs 46 år, och man betalar (efter avrundning på antal år) 6624000 Kr. För sammanboende studenter blir $n = 20.68$, dvs 21 år, och man betalar (efter avrundning) 4536000 Kr.

E.3 Låt P_n vara en kolonnvektor med antalet arbetande, respektive antalet arbetslösa vid år n. Då är:

$$P_n = 2000 \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{3}{4}\right)^n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Förhållandet då $n \to \infty$ blir 4.

E.4 Jämviktspriset 120 Kr kommer att uppnås. Prisbilden blir

$$\begin{pmatrix} L_n \\ N_n \end{pmatrix} = 120 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 10\,(0.7)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

E.5 $P(t) = \frac{a-c}{b+d} + Ce^{-\lambda(b+d)t}$. Jämviktspriset är $\frac{a-c}{b+d}$.

E.6

$$\begin{pmatrix} P \\ F \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} C \\ \frac{a-bC}{m} \end{pmatrix} + c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ m\mu \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ m\mu \end{pmatrix},$$

där $2\lambda_{1,2} = -b\mu \pm \sqrt{b^2\mu^2 - 4m\gamma\mu}$. Numeriska värden ger negativa egenvärden. Systemmatrisen är stabil och systemet är insignalstabilt. För $b = -1$ kollapsar systemet eftersom egenvärdena blir positiva och antingen P eller F blir negativa efter en viss tid.

E.7 Systemmatrisens egenvärden är $\lambda_{1,2} = (\frac{1}{2})(\alpha - \frac{1}{\beta} \pm \sqrt{(\alpha + \frac{1}{\beta})^2 - 4})$ som är enligt villkoret (reella och) negativa. För $t \to \infty$, närmar den allmäna lösningen sig origo, vilket motsvarar jämviktsläge. Vi har:

$$\begin{pmatrix} \pi \\ \sigma \end{pmatrix}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha - \lambda_1 \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha - \lambda_2 \end{pmatrix},$$

E.8 (a) $\rho_V(x) = \int_{-\infty}^{\infty} vn(x-y)vk(y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(ke^{-(x-1)^2/2} + (1-k)e^{-x^2/2}\right)$.
(b) $P = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} \rho_V(x)dx = \frac{1}{2} - \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. Numeriska värden blir enligt Maple 0.466, 0.329 respektive 0.193. Alternativt kan man approximera integranden med hjälp av McLaurin utvecklingen av exponentialfunktionen.

E.9 (a) $D = \sum_{j=1}^{N} c_j(1+r)^{-t_j}$. (b) $D = \sum_{j=1}^{N} c_j e^{-Rt_j}$. (c) $D = \int_0^\infty v(t)e^{-Rt}dt$, med angiven $v(t)$ återfås svaret i (b). (d) Framgår av definitionen för Laplacetransform och svaret i (c). (e) Via uttrycket i (c) och $R = \ln(1+0.025)$ fås $D_1 = 0.203$ samt $D_2 = 0.397$.