Sammanfattning 8

Definition: Systemet $\mathcal{S}$ kallas **insignal-utsignalstabilt** om varje begränsad insignal $w(t)$ ger en begränsad utsignal $(\mathcal{S}w)(t)$.

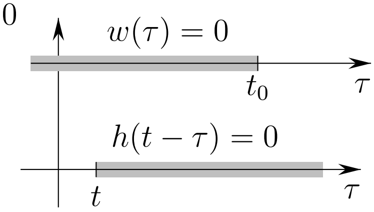
Sats: Låt $\mathcal{S}$ vara ett lineärt och tidsinvariant system med impulssvaret $h(t)$. Då gäller:
$\mathcal{S}$ **insignal-utsignalstabilt** $\Leftrightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt$ är convergent.
Idé om beviset: $\Leftarrow$: Anta att integralen är konvergent och $w(t)$ är begränsad. Då är
$|(\mathcal{S}w)(t)| = |\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)w(\tau)d\tau| \leq C \int |h(t-\tau)|d\tau = C \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau \leq CC_1$.
$\Rightarrow$: Välj som insignal $w(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{om} \quad h(-\tau) > 0 \\ -1 & \text{om} \quad h(-\tau) < 0. \end{cases}$ Utsignalen är $\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)w(\tau)d\tau$.
Beräkna den för $t=0$: $\int_{-\infty}^{\infty} h(-\tau)w(\tau)d\tau = \int |h(-\tau)|d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau$, som är begränsad.

Ex 1: Lågpassfiltret är insignal-utsignalstabilt ty $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{RC} e^{-t/RC}\theta(t)dt = 1$.

Ex 2: Systemet $(\mathcal{S}w)(t) = \dfrac{dw}{dt}$ är inte insignal-utsignalstabilt ty den begränsade insignalen $w(t) = \sin(t^2)$ ger $(\mathcal{S}w)(t) = 2t\cos t^2$ som är obegränsad.

Definition: Systemet $\mathcal{S}$ kallas **kausalt** om för varje tid t_0 och insignaler w_1, w_2, om $w_1(t)=w_2(t)$ för $t < t_0$ så är $(\mathcal{S}w_1)(t)=(\mathcal{S}w_2)(t)$ för $t < t_0$. Om $\mathcal{S}$ är **kausalt** och lineärt, kan villkoret skrivas om som: $\boxed{w(t)=0 \text{ för } t<t_0 \Rightarrow (\mathcal{S}w)(t)=0 \text{ för } t<t_0}$.

Sats 9.2: För $\mathcal{S}$ lineärt och tidsinvariant, $\boxed{\mathcal{S} \text{ kausalt} \Leftrightarrow h(t) \text{ kausalt}}$.
Bevis: $\Rightarrow$: Insignalen $p_\Delta(t)$. Utsignalen $k_\Delta(t,0)$ uppfyller $k_\Delta(t,0)=0$ för $t<t_0$. Därmed är $h(t) = \lim_{\Delta\to 0^+} k_\Delta(t,0)=0$ för $t<t_0$.
$\Leftarrow$: Anta att $h(t)$ är kausalt och att insignalen $w(\tau)=0$ för $\tau<t_0$.
$(\mathcal{S}w)(t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)w(\tau)d\tau$, som är noll för $t<t_0$, se bild.



Ex 3: Lågpassfiltret är kausalt ty $h(t) = \dfrac{1}{RC} e^{-t/RC}\theta(t)$.

Sats 9.3: Om systemet $\mathcal{S}$: $\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bw \\ y &= Cx \end{cases}$ är kausalt så är $h(t) = Ce^{tA}B\theta(t)$.
Notera: Det finns ett nära samband mellan **linjärt differentialekvationsystem** och **lineär insignal-utsignal relation**, men det handlar om två olika begrepp.
Bevis: Lösningen kan skrivas som: $y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} Ce^{A(t-\tau)}Bw(\tau)d\tau$. Om systemet har en kausal insignal-utsignal relation så måste första termen vara noll för alla tider. I så fall, om insignalen är noll för stora negativa tider kan utsignalen omskrivas till $y(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} Ce^{A(t-\tau)}B\theta(t-\tau)w(\tau)d\tau$. Ur integralen fås $h(t) = Ce^{tA}B\theta(t)$.

Övn 9.18: $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} w$, utsignalen $y(t) = x_1(t)$, dvs $C = (1,0)$.
Enligt satsen är $h(t) = Ce^{tA}B\theta(t)$. Återstår att beräkna e^{tA}. Notera: $A^2 = -\dfrac{k}{m}I$ och $A^{2n} = (-\dfrac{k}{m})^n I$, medan $A^{2n+1} = (-\dfrac{k}{m})^n A$. Använd nu definitionen av exponencialen:

$$e^{tA}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{t^{2p}}{(2p)!}A^{2p}+\sum_{p=0}^{\infty}\frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!}A^{2p+1}=(\sum_{p=0}^{\infty}\frac{t^{2p}}{(2p)!}(-\frac{k}{m})^p)I+(\sum_{p=0}^{\infty}\frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!}(-\frac{k}{m})^p))A=$$
$$=\cos\sqrt{\frac{k}{m}}tI+\sqrt{km}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}tA=\begin{pmatrix}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t & \sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t\\ -\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t & \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t\end{pmatrix}.$$ Slutligen,

$$\boxed{h(t)=\frac{1}{\sqrt{km}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t\theta(t)}.$$

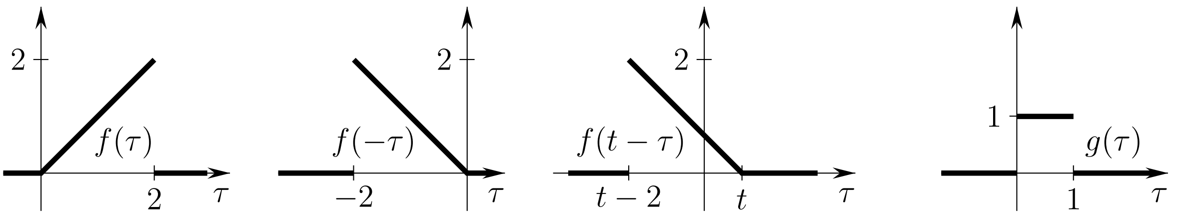
Definition (D): $x=\{x_0,x_1,\cdots\}$, $y=\{y_0,y_1,\cdots\}$ kausala följder. Då kallas $z=x\circledast y=\sum_{j=0}^{k}x(k-j)y(j)$, **faltning** av x och y (för allmänna följder löper index j och k från $-\infty$ till ∞.)

Definition (K): $f(t)$, $g(t)$ funktioner. Då kallas $(f\circledast g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-\tau)g(\tau)d\tau$ (när integralen existerar), **faltning** av f och g.

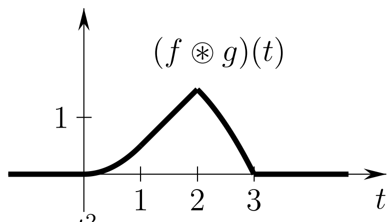
Ex 4: $x=\{1,2,3,0,\cdots\}$, $y=\{3,4,5,0,\cdots\}$ ger $z=\{3,10,22,22,15,0,\cdots\}$.

Ex 5: Utsignalen för en tidsinvariant lineärt system: $(\mathcal{S}w)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)w(\tau)d\tau$.

Ex 6: Beräkna faltningen av $f(t)=t(\theta(t)-\theta(t-2))$, $g(t)=\theta(t)-\theta(t-1)$.



$$(f\circledast g)(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \int_0^t(t-\tau)d\tau & 0<t<1\\ \int_0^1(t-\tau)d\tau & 1<t<2\\ \int_{t-2}^1(t-\tau)d\tau & 2<t<3\\ 0 & t>3\end{cases}$$



$$(f\circledast g)(t)=\frac{t^2}{2}(\theta(t)-\theta(t-1))+(t-\frac{1}{2})((\theta(t-1)-\theta(t-2))+(\frac{3}{2}+t-\frac{t^2}{2})((\theta(t-2)-\theta(t-3)).$$

Sök på hemsidan javaapplikationer eller datoranimeringar om faltning.

Definition (Translationsoperator): $(T_a(f))(t)=f(t-a)$.

Ex 7: $T_\pi(\sin t)=\sin(t-\pi)=-\sin t$.

Sats 10.1:

$f\circledast g=g\circledast f$	
$f\circledast(g+h)=f\circledast g+f\circledast h$	(om bägge sidor existerar)
$T_a(f\circledast g)=(T_af)\circledast g=f\circledast(T_ag)$	
$f\circledast(g\circledast h)=(f\circledast g)\circledast h$	t ex om f,g,h är kausala. Flera villkor i boken.
$\frac{d}{dt}(f\circledast g)=\frac{df}{dt}\circledast g=f\circledast\frac{dg}{dt}$	Om f,g,f',g' är absolut integrabla.