Sammanfattning 6

Övn 5.9: Om $AB = BA$ visa att a) $A^k B = BA^k$, b) $e^A B = Be^A$, c) $e^A e^B = e^B e^A$
Bevis:

a) $A^k B = \overbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}^{k-1 \text{ st}} AB = \overbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}^{k-1 \text{ st}} BA = BA^k$.

b) $e^A B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} BA^k = B \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = Be^A$.

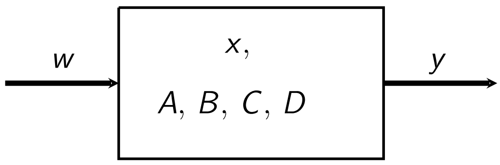
c) $e^A e^B = e^A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} e^A B^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k e^A = e^B e^A$.

Övn 5.18: $AB = BA \Rightarrow e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB}$. Använd **Sats 5.4**. Lösningen till $\frac{d\Phi}{dt} = (A+B)\Phi$, $\Phi(0) = I$ är $\Phi(t) = e^{t(A+B)}$. Men $\frac{d(e^{tA}e^{tB})}{dt} = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB} = Ae^{tA}e^{tB} + Be^{tA}e^{tB}$ (pga **Övn 5.9**b). Dvs $\frac{d(e^{tA}e^{tB})}{dt} = (A + B)e^{tA}e^{tB}$ och även begynnelsevillkoret uppfylls. Pga entydighet, så är $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$. Detta bevisar delar av **Sats 5.1**.

Insignal & Utsignalrelationer (Börja med att läsa avsn **9.1–9.3** själv!)

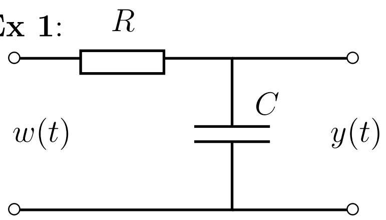
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= Ax + Bw \\ y &= Cx + Dw \end{cases}$$

Systemets egenskaper (x, A, B, C, D) sammanfattas i ett uttryck som säger hur insignalen w omformas till utsignalen y.



Vi skriver $y = \mathcal{S}w$ eller $y(t) = (\mathcal{S}w)(t)$.

Ex 1:



Lågpassfilter med insignalen $w(t)$:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{RC} y = \frac{1}{RC} w$$

$$y(t) = e^{-(t-t_0)/RC} y(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{RC} e^{-(t-\tau)/RC} w(\tau) d\tau$$

$y(t_0)$ begränsad då $t_0 \to -\infty$: $\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{RC} e^{-(t-\tau)/RC} w(\tau) d\tau}$.

Om $w(t) = c_1 w_1(t) + c_2 w_2(t)$ så är $y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)/RC} (c_1 w_1(\tau) + c_2 w_2(\tau)) d\tau = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ (där varje y_i är som ovan).

Definition: Systemet $\mathcal{S}$ kallas **linjärt** (el **lineärt**) om $\boxed{\mathcal{S}(c_1 w_1 + c_2 w_2) = c_1 \mathcal{S}(w_1) + c_2 \mathcal{S}(w_2)}$, för alla tal c_1, c_2 och alla tillåtna insignaler $w_1(t)$, $w_1(t)$. Villkoret kan även uttryckas som: $\boxed{\mathcal{S}(w_1 + w_2) = \mathcal{S}(w_1) + \mathcal{S}(w_2)}$ och $\boxed{\mathcal{S}(cw) = c\mathcal{S}(w)}$.

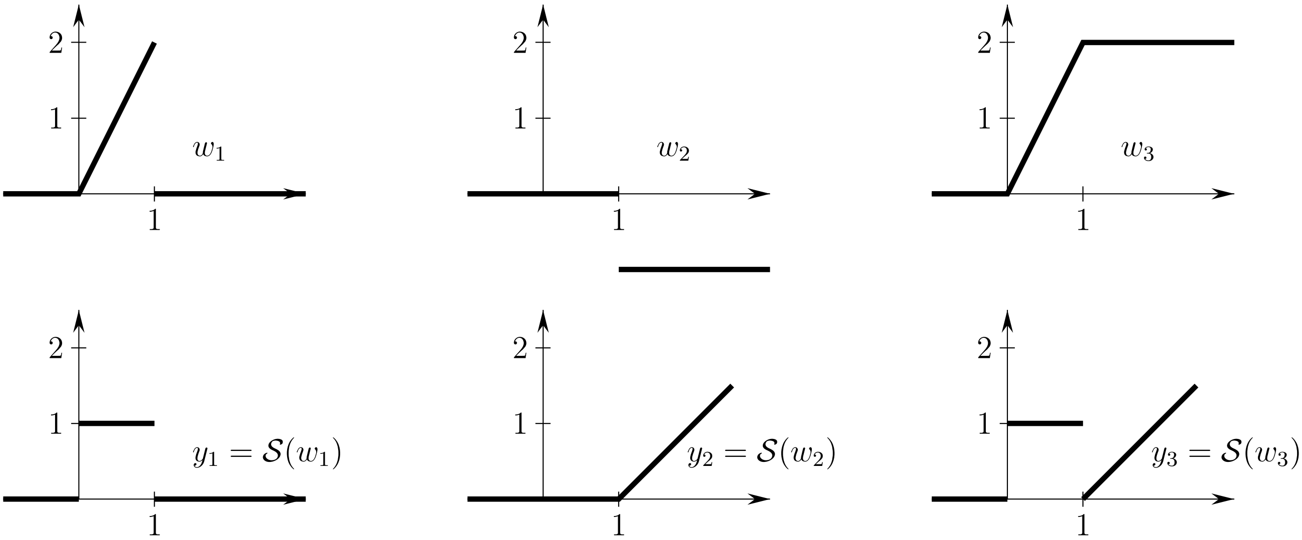
Ett nödvändigt villkor för lineäritet: Om är $\mathcal{S}$ lineärt, så är $\mathcal{S}(0) = 0$.

> **OBS!** Ett linjärt differentialekvation system ger en lineär insignal-utsignal relation $\mathcal{S}$ bara när begynnelsevillkor $x(0)$ kan ignoreras helt (kommer tillbaka senare i **Sats 9.3**).

Övn 9.3h: $\mathcal{S}(w) = \int_0^t \tau^2 w(\tau) d(\tau)$ är lineär ty $\mathcal{S}(c_1 w_1 + c_2 w_2) = \int_0^t \tau^2 (c_1 w_1(\tau) + c_2 w_2(\tau)) d(\tau) = c_1 \int_0^t \tau^2 w_1(\tau) d(\tau) + c_2 \int_0^t \tau^2 w_2(\tau) d(\tau) = c_1 \mathcal{S}(w_1) + c_2 \mathcal{S}(w_2)$.

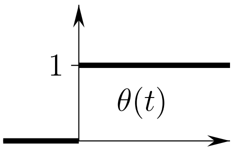
Övn 9.3g: $\mathcal{S}(w) = w\dfrac{dw}{dt}$ är inte lineär ty $\mathcal{S}(2w) = (2w)\dfrac{d(2w)}{dt} = 4w\dfrac{dw}{dt} \neq 2\mathcal{S}(w)$.

Ex 2: Är följande systemet lineärt? Nej! Notera att $w_3 = w_1 - 2w_2$, men $y_3 \neq y_1 - 2y_2$.

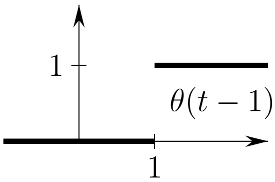


Definition: Heavisides stegfuntion θ:

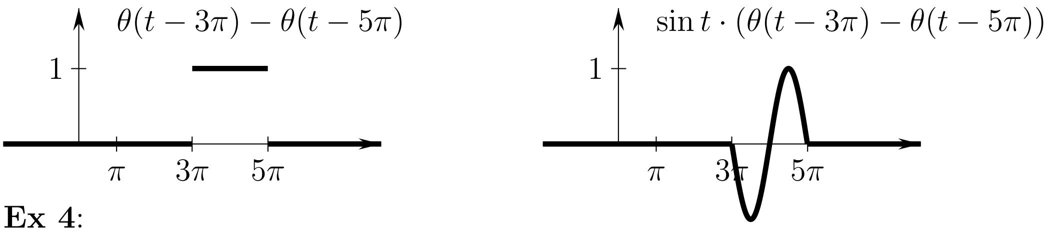
$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{om} \quad t < 0 \\ 1 & \text{om} \quad t > 0 \end{cases}$$



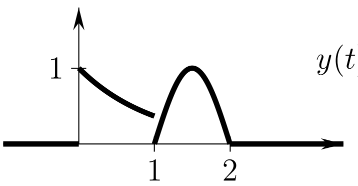
Notera:



Ex 3: Olika användningar av Heaviside funktionen.



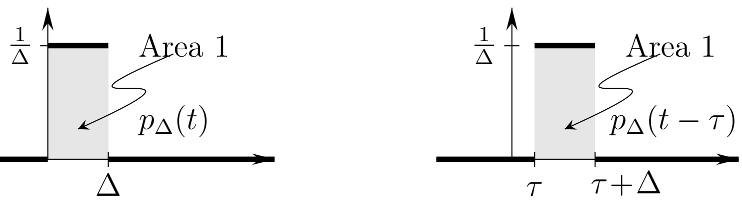
Ex 4:



$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{om} \quad t < 0 \\ e^{-t} & \text{om} \quad 0 < t < 1 \\ -\sin \pi t & \text{om} \quad 1 < t < 2 \\ 0 & \text{om} \quad t > 2 \end{cases}$$

$y(t) =$
$e^{-t}\,(\theta(t) - \theta(t-1)) -$
$\sin \pi t\,(\theta(t-1) - \theta(t-2))$.

Definition: **Enhetspulsen** vid tiden 0 och bredden Δ: $\boxed{p_\Delta(t) = \dfrac{1}{\Delta}(\theta(t) - \theta(t-\Delta))}$.



Heaviside funktionen kan utnyttjas för att genomgående använda $\pm\infty$ som integrationsgränser. Integranden ”klippas av” med hjälp av pulser av lämplig bredd.

Ex 5: Integralen i **Ex 1** kan skrivas $y(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{RC} e^{-(t-\tau)/RC} w(\tau)\theta(t-\tau)d\tau$.

Definition: $f(t)$ kallas **kausal** om $f(t) = 0$ då $t < 0$.
Definition: $\theta(t)f(t)$ kallas den **kausala avskärningen** av f.