Sammanfattning 5

Tidsdiskreta system

Sats: Systemet $x(k+1) = Ax(k) + Bw(k)$, $k = 0, 1, \cdots$, där A och B är konstanta matriser (A kvadratisk) har lösningen $\boxed{x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} Bw(j),\ k = 1, 2, \cdots}$.

Bevis: Insättning.

Ex 1: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $w(k) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Matrisen A kan diagonaliseras, $\lambda_1 = 5$, $S_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\lambda_2 = -1$, $S_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. $Bw(k) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2S_1$.

$$x(k) = 2\sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} S_1 = 2\sum_{j=0}^{k-1} \lambda_1^{k-1-j} S_1 = \frac{1}{2}(5^k - 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Övn Td.5 $x(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} x(k) - \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix} 2^k$, $k = 0, 1, 2, \cdots$, där $x(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Alt 1: Gör som i förra föreläsning ty systemmatrisen A har inte 2 som egenvärde.

Alt 2: Jfr **Ex 1**: $x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j}(-1)2^j \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$. Diagonalisera A (**Ex 1** igen) och skriv: $x(0) = 2S_1 + 4S_2$ samt $\begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix} = 4S_1 - 2S_2$. Slutligen:

$$x(k) = 2 \cdot 5^k S_1 + 4 \cdot (-1)^k S_2 - 4\sum_{j=0}^{k-1} 5^{k-1-j} \cdot 2^j S_1 - 2\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-1-j} \cdot 2^j S_2, \text{ dvs}$$

$$\boxed{x(k) = \frac{2}{3}5^k S_1 + \frac{10}{3}(-1)^k S_2 + 2^k\left(\frac{4}{3}S_1 + \frac{2}{3}S_2\right)}.$$

Övn Td.6 $x(k+1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} x(k) + 1000\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $k = 0, 1, 2, \cdots$.

(a) Konstant partikulärlösning: $c_1 = \frac{1}{2}(c_1 + c_2)$ samt $c_2 = 3000 - \frac{1}{2}(5c_1 + c_2)$, dvs $c_1 = c_2 = 750$.

(b) Egenvärden och egenvektorer: $\lambda_1 = i$, $S_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + 2i \end{pmatrix}$ och $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = -i$, $S_2 = \overline{S_1}$.

(c) $|\lambda_i| = 1$, dvs varken utrotning eller obegränsad tillväxt. Däremot oscillerar populationerna med period 4 eftersom $i^{k+4} = i^k$.

Ex 2: $\dot{x} = Ax + f(t)$. IF e^{-tA}:

$$e^{-tA}\dot{x} - e^{-tA}Ax = \frac{d}{dt}(e^{-tA}x) = e^{-tA}f(t).$$

$$e^{-tA}x(t) - e^{-t_0 A}x(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{\tau A} f(\tau)d\tau.$$

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A} f(\tau)d\tau.$$

Matrisfunktioner: Serieuttrycket $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ är konvergent för alla $z \in \mathbb{C}$.
Potenser av en matris definieras naturligt som $A^n = A \cdot A \cdot \cdots \cdot A$ (n faktorer).

Definition: $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2} + \cdots$.

Ex 3: $e^I = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{I^k}{k!} = (\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!})I = eI$.

Ex 4:$D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^k \end{pmatrix}$ och $e^D = \begin{pmatrix} e^{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{d_n} \end{pmatrix}$.

Ex 5: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = 0$ och $e^A = I + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$A = SDS^{-1} \Rightarrow A^2 = SDS^{-1}SDS^{-1} = SD^2S^{-1}$, $A^n = SD^nS^{-1}$ och $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{SD^kS^{-1}}{k!} = Se^DS^{-1}$.

Ex 6: $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ och $e^A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-3} + e & e^{-3} - e \\ e^{-3} - e & e^{-3} + e \end{pmatrix}$.

På samma sätt är för alla reella t: $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$.

I **Ex 5** blir det $e^{tA} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-3t} + e^t & e^{-3t} - e^t \\ e^{-3t} - e^t & e^{-3t} + e^t \end{pmatrix} = \frac{1}{2}e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}e^t \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Sats 5.1:
$e^0 = I$
$e^(A + B) = e^A \cdot e^B$ om $AB = BA$.
$e^{(t_1+t_2)A} = e^{t_1A} \cdot e^{t_2A}$ för alla tal t_1, t_2.
$(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$ samt $(e^A)^T = e^{(A^T)}$
$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A$.
(använd $e^{tA} = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \cdots$)

Ex 7: $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, dvs $t_0 = 0$ och $f = 0$. Därmed blir $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{5}{2}e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Övn 5.11 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I + B$. Konstatera att $IB = BI$ och därmed (sats 5.1) $e^{t(I+B)} = e^{tI} \cdot e^{tB} = e^t I e^{tB}$. Dessutom är $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ och $B^3 = 0$.

Därmed är $e^{tB} = I + tB + \frac{t^2}{2}B^2$ och $e^{tA} = e^t \begin{pmatrix} 1 & t & t + \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Obs! **Övn 5.11** och **Ex 2** hjälper till i beviset av **Sats 4.5** från förra föreläsningen, eftersom när systemmatrisen är stabil, och $f(t)$ är begränsad, så är integralen i **Ex 2** konvergent. Läs själv **Sats 5.6**.