Sammanfattning 3

Alla matriser kan inte diagonaliseras

Ex 1: $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 2x_2, \\ \dot{x}_2 = x_2 \end{cases} \rightarrow x_2(t) = c_2 e^t$ och $\dot{x}_1 - x_1 = 2c_2 e^t$. Integrerande faktorn e^{-t}:

$$e^{-t}\dot{x}_1 - e^{-t}x_1 = \frac{d}{dt}(e^{-t}x_1) = 2c_2 \quad \longrightarrow \quad x_1(t) = (c_1 + 2c_2 t)e^t.$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ har endast ett egenvärde, $\lambda = 1$ och egenvektorer $x = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s \neq 0$.

Sats 3.9: $\left.\begin{array}{l} A \quad n \times n \\ \text{alla egenvärden olika} \end{array}\right\} \Rightarrow A$ är diagonaliserbar.

Bevis (för $n = 3$): Vi skall visa att A har tre linjärt oberoende egenvektorer. Till varje egenvärde kan man välja en egenvektor, så låt oss bilda $Q = a_1 S_1 + a_2 S_2 + a_3 S_3$, en linjär kombination av dessa som är lika med (vektorn) noll. Vi skall visa att detta inträffar bara om koefficienterna a_1, a_2, a_3 är alla noll. $Q = 0 \Rightarrow (\lambda_1 I - A)(\lambda_2 I - A)Q = 0$, dvs:
$a_3(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)S_3 = 0$. Detta kräver $a_3 = 0$. På motsvarande sätt bevisas att även a_1, a_2 är noll. $\square$

Obs! Olika egenvärden $\Rightarrow$ diagonaliserbar
Multipla (upprepade) egenvärden: **inget kan fastställas utan vidare arbete.**

Vissa matriser som t ex $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ kan diagonaliseras; andra som t ex $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ kan inte diagonaliseras, men de har samma egenvärde och samma karakteristiska polynom.

Ex 2: Lös $\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} x$. $\det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)^2 + 1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2 \pm i$. Olika egenvärden, dvs diagonaliserbar. $S_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. Notera att $\overline{AS_1} = \overline{\lambda_1 S_1} = A\overline{S_1} = \lambda_2 \overline{S_1}$ dvs
$S_2 = \overline{S_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$. Därmed $x(t) = c_1 e^{(2+i)t} S_1 + c_2 e^{(2-i)t} S_2$.
Komponentvis fås $\boxed{x_1(t) = e^{2t}(C\cos t + D\sin t)}$ och $\boxed{x_2(t) = e^{2t}(D\cos t - C\sin t)}$.

Olika användbara matrisegenskaper

Sats 3.12: $B = S^{-1}AS \Rightarrow p_B(\lambda) = p_A(\lambda)$.
Bevis: $p_B(\lambda) = \det(\lambda I - B) = \det(\lambda I - S^{-1}AS) = \det(\lambda S^{-1}IS - S^{-1}AS) = \det(S^{-1}(\lambda I - A)S) = \det(S^{-1})\det(\lambda I - A)\det(S) = p_A(\lambda)$. $\square$
Följdsatser: $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i, \quad \mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Övn 3.6: $Az = \lambda z \Rightarrow (aI + bA)z = aIz + bAz = (a + b\lambda)z$.
Övn 3.7.a: $Az = \lambda z \Rightarrow A^2 z = A(Az) = A(\lambda z) = \lambda Az = \lambda^2 z$.

Övn 3.7.b: $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. A har egenvärden 0, 1, -1 och därmed tre linjär oberoende egenvektorer, nämligen $S_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $S_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $S_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
A^2 har egenvärdet 0, med egenvektor S_0 och egenvärde 1 (dubbelt). De icke-triviala lösningarna till $(I - A^2)x = 0$ uppfyller

$$x = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (t, s) \neq (0, 0).$$

T ex $t = 0$ och $s = 1$ ger en egenvektor till A^2 som inte är egenvektor till A.

Övn 3.8: Vektorn $z = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ är egenvektor till A med egenvärde n. Alla vektorer y sådana att $y \cdot z = 0$, dvs $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 0$ är egenvektorer till A med egenvärde 0, och det finns $(n-1)$ st linjärt oberoende vektorer av den typen.

Övn 3.9: Med A från **3.8** har vi $B = bA + (a-b)I$. Jfr **Övn 3.6**. Samma egenvektorer som i **3.8**, med egenvärden $b \cdot n + (a-b)$ resp. $b \cdot 0 + (a-b)$.

Övn 3.28: $\frac{dI}{dt} = 0 = \frac{d}{dt}(A^{-1}A) = \frac{d}{dt}(A^{-1}) \cdot A + A^{-1} \cdot \frac{d}{dt}(A) \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}(A^{-1}) = -A^{-1} \cdot \frac{dA}{dt} \cdot A^{-1}}$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2-t^2} \begin{pmatrix} 2 & -t \\ -t & 1 \end{pmatrix}$ och $\frac{dA}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(A^{-1}) &= -\frac{1}{(2-t^2)^2} \begin{pmatrix} 2 & -t \\ -t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -t \\ -t & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{d}{dt}(A^{-1}) = -\frac{1}{(2-t^2)^2} \begin{pmatrix} 4t & -t^2 - 2 \\ -t^2 - 2 & 2t \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

vilket kan även beräknas genom att derivera varje matriselement för sig.