Sammanfattning 2

Given en kvadratisk matris A, ett tal λ och en vektor z sådana att $z \neq 0$ och $Az = \lambda z$ kallas *egenvärde* och *egenvektor*.

$$Az = \lambda z \Rightarrow (\lambda I - A)z = 0.$$

$z \neq 0$ och linjär algebras huvudsats ger $\det(\lambda I - A) = 0$.

Exempel 1: $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}$.

1. $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 10\lambda - 75$.
2. $\lambda_{1,2} = 15, \ -5$.
3. $S_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $S_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Skriv upp polynomet $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$.
2. Finn samtliga rötter, dvs lös $p_A(\lambda) = 0$.
3. För varje rot finn icke-noll lösningar till $(\lambda I - A)z = 0$.

Exempel från diskreta system: Lös övn Td 2.

Lös övn **E.1**.

Exempel 2: Lös differensekvationen

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= -3x_k + 6y_k; \quad x_0 = 1 \\ y_{k+1} &= 6x_k + 13y_k; \quad y_0 = 23. \end{aligned} \quad v_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}, \ v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 23 \end{pmatrix}, \ \boxed{v_k = Av_k} \text{ och } \boxed{v_k = A^k v_0}.$$

Skriv $v_0 = c_1S_1 + c_2S_2$. Det blir $c_1 = 7$, $c_2 = 2$. Därmed $v_k = A^k(7S_1 + 2S_2) = 7A^kS_1 + 2A^kS_2$. Med hjälp av Ex 1 fås $\boxed{v_k = 7 \cdot 15^k S_1 + 2 \cdot (-5)^k S_2}$.

Allmännt då A har n st linjärt oberoende egenvektorer kan man lösa problemet $x_{k+1} = Ax_k$ med begynnelsevillkor x_0, genom att skriva om $x_0 = c_1S_1 + c_2S_2 + \cdots + c_nS_n$ och

$$\boxed{\boxed{x_k = c_1\lambda_1^k S_1 + c_2\lambda_2^k S_2 + \cdots + c_n\lambda_n^k S_n.}}$$

Lös övn **E.3** och Td 3 (stabilitetsdelen kan vänta till Kap. 4).

Differentialekvationsystemet $\dot{x} = Ax$

Låt $S = (S_1, S_2, \cdots S_n)$ vara en matris som har linjärt oberoende vektorer som kolonner och D en diagonal matris sådana att $AS = SD$. Med den inverterbara matrisen S kan man genomföra en koordinattransformation och skirva om ekvationen som:

$$\dot{z} = S^{-1}\dot{x} = (S^{-1}AS)S^{-1}x = Dz.$$

Systemet omvandlas till n st frikopplade endimensionella problem av typen $\dot{z}_i = \lambda_i z_i$, $i = 1, \cdots, n$, med lösningen $z_i(t) = c_i e^{\lambda_i t}$. Genom $x = Sz$ transformeras lösningen tillbaka till de ursprungliga koordinaterna:

$$\boxed{\boxed{x(t) = c_1e^{\lambda_1 t}S_1 + c_2e^{\lambda_2 t}S_2 + \cdots + c_ne^{\lambda_n t}S_n.}}$$

Jämför med ovan och med sats 3.8, s 49. A kallas diagonaliserbar om den har n st linjärt oberoende egenvektorer.

Övn 3.32: $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$\mathsf{S} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t) = c_1 e^{15t} \mathsf{S}_1 + c_2 e^{-5t} \mathsf{S}_2.$

Vid $t = 0$ fås $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \mathsf{S}_1 + c_2 \mathsf{S}_2$, dvs $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ och $c_1 = \frac{1}{10}$, $c_2 = \frac{3}{10}$.

Därmed: $x(t) = \dfrac{3}{10}(e^{15t} - e^{-5t})$ och $y(t) = \dfrac{1}{10}(9e^{15t} + e^{-5t})$. Förhållandet $x : y$ för stora t är samma som egenvektorn S_1 motsvarande största egenvärdet.

Exempel 3: $\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$

$$\dot{\mathsf{z}} = \mathsf{S}^{-1}\dot{\mathsf{x}} = \mathsf{D}\mathsf{z} + \mathsf{S}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \mathsf{D}\mathsf{z} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$\dot{z_1} = 15z_1 - 1$, därmed $\boxed{z_1(t) = c_1 e^{15t} + \dfrac{1}{15}}$. $\dot{z_2} = -5z_2 - 1$, därmed $\boxed{z_2(t) = c_2 e^{-5t} - \dfrac{1}{5}}$.

Begynnelsevillkor: $\mathsf{z}(0) = \mathsf{S}^{-1}\mathsf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Därmed: $c_1 = \dfrac{14}{15}$ och $c_2 = -\dfrac{4}{5}$.

Det blir $\boxed{x_1(t) = \dfrac{14}{15}e^{15t} + \dfrac{12}{5}e^{-5t} + \dfrac{2}{3}}$ och $\boxed{x_2(t) = \dfrac{14}{5}e^{15t} - \dfrac{4}{5}e^{-5t}}$. Notera att lösningen kan skrivas som: $\mathsf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathsf{S}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathsf{S}_2 + \mathsf{x}_p(t)$, där $\mathsf{x}_p(t)$ är en partikulärlösning.

Exempel 4: Årlig variation hos en population av ugglor och råttor.

$$\begin{cases} u_{k+1} = 0.5u_k + 0.4r_k, & u_0 = 48 \\ r_{k+1} = -0.125u_k + 1.1r_k, & r_0 = 80 \end{cases}$$

(i tusentals). Hur ser populationen ut efter lång tid?

$\mathsf{v} = \begin{pmatrix} u \\ r \end{pmatrix}$, $\mathsf{v}_0 = \begin{pmatrix} 48 \\ 80 \end{pmatrix}$, $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 \\ -0.125 & 1.1 \end{pmatrix}$ och $\mathsf{v}_{k+1} = \mathsf{A}\mathsf{v}_k$.

$\det(\lambda \mathsf{I} - A) = \lambda^2 - 1.6\lambda + 0.6 = (\lambda - 1)(\lambda - 0.6)$. $\quad \mathsf{S}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\mathsf{S}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\mathsf{v}_k = c_1 \cdot 1^k \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + c_2 \cdot (0.6)^k \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\mathsf{v}_0 = \begin{pmatrix} 48 \\ 80 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$c_1 = 17$ och $c_2 = -5$. Därmed blir det

$$\begin{pmatrix} u_k \\ r_k \end{pmatrix} = 17 \cdot 1^k \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} - 5 \cdot (0.6)^k \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Förhållandet efter lång tid blir densamma som egenvektorn S_1.