# Sammanfattning 19

**Kvadratkomplettering**:

| | |
|---|---|
| (1) Gruppera alla termer med $x_1$ | (2) Bryt ut koefficienten på $x_1^2$ |
| (3) Kvadratkomplettera $x_1$ | (4) Forstätt med $x_2$. |

**Ex. 1**: $f(x_1,x_2) = 10x_1^2 + -4x_1x_2 + 7x_2^2 = 10(x_1 - \frac{1}{5}x_2)^2 + \frac{33}{5}x_2^2$.
Kvadratkomplettering genererar en ny koordinattransformation $z = Rx$, i detta fall:
$\left\{\begin{array}{lcl} z_1 &=& x_1 - \frac{1}{5}x_2 \\ z_2 &=& x_2 \end{array}\right.$ och $R = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $f = x^T K x = z^T \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & \frac{33}{5} \end{pmatrix} z = x^T \underbrace{R^T D_1 R}_{=K} x$.

**Sidestep**: Den positiv definita matrisen $K$ kan skrivas som $K = LL^T$ där $L = R^T\sqrt{D_1}$ är en vänstertriangulär matris. Detta kallas **Choleskyfaktorisering**.

**Ex. 2**: Lös systemet $\left\{\begin{array}{rcl} 10x_1 - 2x_2 &=& y_1 \\ -2x_1 + 7x_2 &=& y_2 \end{array}\right.$ med Gausselimination. **Lösning**:
$\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]:=[2]+\frac{1}{5}[1]} \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 0 & \frac{33}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, dvs
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 0 & \frac{33}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & \frac{33}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

**Sats**: Om $K$ är symmetrisk och inverterbar, faktorisering $R_1^T D_1 R_1$ via kvadratkomplettering och $R_2^T D_2 R_2$ via Gausselimination är likadana, där $R_1$, $R_2$ är högertriangulära matriser med pivåelement 1. **Bevis**: $K = R_1^T D_1 R_1 = R_2^T D_2 R_2$ dvs $D_2{}^{-1}(R_2{}^{-1})^T R_1^T D_1 = R_2 R_1{}^{-1}$. Vänsterledet är en vänstertriangulär matris och högerleden är högertriangulär med ettor i diagonalen, dvs $R_2R_1{}^{-1} = I$ och därmed $R_2 = R_1$, $D_2 = D_1$.

**Ex. 3**: $\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1=10} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]:=[2]+2[1]=10} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{33}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2=\frac{33}{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Ex. 4**: Studera $f = x^T K x$, där $K = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix}$. **Metod 1**: Diagonalisera (**Övn 6.29**)
$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 21$, dvs positiv definit. **Metod 2**: Kvadratkomplettering.
$f = 2(x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3) + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + 20x_3^2 =$
$2((x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{3}{2}x_3)^2 - (\frac{x_2+3x_3}{2})^2) + 2x_2^2 + 6x_2x_3 + 20x_3^2 = 2(x_1+\frac{x_2+3x_3}{2})^2 + \frac{3}{2}x_2{}^2 + 3x_2x_3 + \frac{31}{2}x_3^2 =$
$2(x_1 + \frac{x_2+3x_3}{2})^2 + \frac{3}{2}(x_2{}^2 + 2x_2x_3) + \frac{31}{2}x_3^2 = 2(x_1 + \frac{x_2+3x_3}{2})^2 + \frac{3}{2}(x_2+x_3)^2 + 14x_3^2$.
Koordinatbytet ges av $z = Rx$, där $R = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Samma $R$ ger Gausselimination:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1=3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow[{[3]:=[3]-3[1]}]{[2]:=[2]-[1]} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{31}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2=\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{31}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{[3]:=[3]-\frac{3}{2}[2]}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3=14} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Sats 7.4 (Sylvesters tröghetslag)**: Om en kvadratisk form $f = x^T K x$ kan diagonaliseras dels med transformationen $x = S\hat{x}$, dels med $x = S'\hat{x}'$, dvs $x^T K x = \hat{x}^T D \hat{x} = \hat{x}'^T D' \hat{x}'$, så har $D, D'$ lika många positiva (negativa) diagonalelement.

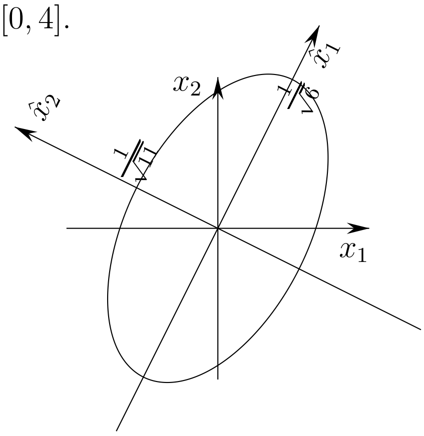
**Sats 7.6**: Givet en symmetrisk och reell matris $K$ och ett reellt tal $\sigma$, då är antalet egenvärden av $K$ som är större (resp mindre) än $\sigma$ lika med antalet positiva (resp negativa) pivåelement vid Gausselimination av $K - \sigma I$.

**Ex. 5**: Hur många egenvärden har $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix}$ i $0 < \lambda < 4$? **Lösning**:

$$K - 4I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & 46 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1=-2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & 16 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & \frac{9}{2} & \frac{41}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2=-\frac{3}{2}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & \frac{9}{2} & \frac{41}{2} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 34 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3=34} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$ Så har $K$ två egenvärden som är $< 4$ och ett som är $> 4$. Fallet $\sigma = 0$ har vi redan gjort, $K$ är positiv definit och alla pivåelement är positiva. **Svar**: $K$ har 2 egenvärden i $[0, 4]$.

**Ex. 6**: Tolka $10x_1^2 - 4x_1x_2 + 7x_2^2 = 1$. Formen studerades i slutet av förra föreläsningen via egenvärden och egenvektorer: $K = QDQ^T$ och $D = Q^T K Q$, där $Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$. Låt $x = Q\hat{x}$. Då gäller $x^T K x = 1 = (Q\hat{x})^T K (Q\hat{x}) = \hat{x}^T D \hat{x} = 1 = 6\hat{x}_1^2 + 11\hat{x}_2^2$ dvs ekvationen beskriver en ellips längs axlarna $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$.




**Övn 7.18**: Bestäm största och minsta värdet av $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2$, under bivillkoret $g : x_1^2 + x_2^1 = 1$. **Lösning**: $f = x^T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} x = x^T K x$.

$\det(\lambda I - K) = (\lambda - 2)(\lambda + 3)$ och $Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Om $x = Q\hat{x}$ så är

$f = x^T K x = (Q\hat{x})^T K Q \hat{x} = \hat{x}^T D \hat{x} = 2\hat{x}_1^2 - 3\hat{x}_2^2$, ty $D = Q^T K Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Bivillkoret blir $1 = x^T x = (Q\hat{x})^T Q \hat{x} = \hat{x}^T \hat{x}$. Största värdet uppnås då $\hat{x}_1$ är störst och minsta värdet då $\hat{x}_2$ är störst. **Svar**: 2 och $-3$.