Sammanfattning 17

Ensidig Laplacetransform:

Definition: $(\mathcal{L}_I)f = \mathcal{L}(\theta f) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$. Ensidig Laplace motsvarar ”vanlig” Laplace av θf. **Obs!** I många böcker och tillämpningar, kallar man den ensidiga Laplacetransformen för ”Laplacetransform” och den andra kallas för ”dubbelsidig Laplacetransform”.

Ex. 1: $\mathcal{L}_I f' = \mathcal{L}(\theta f') = \mathcal{L}((\theta f)' - f(0)\delta) = \boxed{s\mathcal{L}_I f - f(0) = \mathcal{L}_I f'}$, ty $(\theta f)' = \theta(t) f' + \delta f(t) = \theta(t) f' + \delta f(0)$.

Sats: $\mathcal{L}_I f^{(n)} = s^n \mathcal{L}_I f - s^{(n-1)} f(0) - s^{(n-2)} f'(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$.
Bevis: Använd distributionsderivatan av θf (som i **Ex. 1**) upprepade gånger: $(\theta f)'' = (\theta(t) f' + \delta f(0))' = \theta(t) f'' + \delta f'(0) + \delta' f(0)$ och på samma sätt blir det $(\theta f)^{(n)} = \theta(t) f^{(n)} + \delta f^{(n-1)}(0) + \delta' f^{(n-2)}(0) + \cdots + \delta^{(n-2)} f'(0) + \delta^{(n-1)} f(0)$. Ta sedan (vanlig) Laplacetransform av sista ekvationen.

Ex. 2: I **Övn 10.7** visade vi att $\theta f \circledast \theta g = \theta(t) \displaystyle\int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau$. Detta, tillsammans med faltningsatsen (för vanlig Laplace) ger $\boxed{\mathcal{L}_I \left(\int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau \right) = \mathcal{L}_I f \cdot \mathcal{L}_I g}$.

Ensidig Laplacetransform och begynnelsevärdesproblem:
Ex. 3: Lös $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 1$, $t > 0$, med begynnelsevillkor $y(0) = 1$ och $y'(0) = -2$.
I) Ledvismultiplikation med θ ger $\theta y'' + 2\theta y' + 2\theta y(t) = \theta$.
II) Laplacetransform av ekvationen ger: $\mathcal{L}(\theta y'') + 2\mathcal{L}(\theta y') + 2\mathcal{L}(\theta y) = \mathcal{L}(\theta)$, dvs
$\mathcal{L}_I y'' + 2\mathcal{L}_I y' + 2\mathcal{L}_I y = \dfrac{1}{s} = (s^2 \mathcal{L}_I y - s y(0) - y'(0)) + 2(s\mathcal{L}_I y - y(0)) + 2\mathcal{L}_I y = \dfrac{1}{s}$.
III) Sätt in begynnelsevillkor och lös för $2\mathcal{L}_I y = Y(s)$: $(s^2 + 2s + 2)Y - s - (-2) - 2 = 1/s$, dvs $Y(s) = \dfrac{s + 1/s}{s^2 + 2s + 2} = \dfrac{1}{2s} + \dfrac{s+1}{2(1 + (s+1)^2)} - \dfrac{3}{2(1 + (s+1)^2)}$, $\Re(s) > 0$ ty θy kausal.
IV) Inverstransformera: $\theta(t)\, y(t) = \dfrac{1}{2}\theta(t) + \dfrac{1}{2} e^{-t} \cos t\, \theta(t) - \dfrac{3}{2} e^{-t} \sin t\, \theta(t)$, dvs
$\boxed{y(t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} e^{-t} \cos t - \dfrac{3}{2} e^{-t} \sin t,\ t > 0}$. Man kan dubbelkolla svaret genom att konstatera att begynnelsevillkoren stämmer överens med lösningen.

Ex. 4: Lös $\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1 + 4x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 2x_2 \end{cases}$; $x_1(0) = 1 = x_2(0), t > 0$. **Lösning**: $\begin{cases} \theta\dot{x}_1 &= \theta x_1 + 4\theta x_2 \\ \theta\dot{x}_2 &= \theta x_1 - 2\theta x_2 \end{cases}$.

Laplace: $\begin{cases} sX_1(s) - x_1(0) &= X_1(s) + 4X_2(s) \\ sX_2(s) - x_2(0) &= X_1(s) - 2X_2(s) \end{cases}$, där $X_1(s) = \mathcal{L}_I x_1$, $X_2(s) = \mathcal{L}_I x_2$.

$\begin{cases} (s-1)X_1 - 4X_2 &= 1 \\ -X_1 + (s+2)X_2 &= 1 \end{cases}$, dvs $\begin{cases} X_1 &= \frac{s+6}{(s-2)(s+3)} &= \frac{8/5}{s-2} - \frac{3/5}{s+3}, \ \Re(s) > 2 \\ X_2 &= \frac{s}{(s-2)(s+3)} &= \frac{2/5}{s-2} + \frac{3/5}{s+3}, \ \Re(s) > 2 \end{cases}$.

Därmed är lösningen $\begin{cases} \theta(t)\, x_1(t) &= (\frac{8}{5} e^{2t} - \frac{3}{5} e^{-3t})\theta(t) \\ \theta(t)\, x_2(t) &= (\frac{2}{5} e^{2t} + \frac{3}{5} e^{-3t})\theta(t) \end{cases}$.

Beräkning av e^{At} och Laplacetransform:

Sats 14.20 $\mathcal{L}(e^{At}\theta) = (sI - A)^{-1}$, där $\Re(s) > \sigma(A)$. **Bevis :**
$\mathcal{L}(e^{At}\theta) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{At} dt = \int_0^\infty e^{-(sI-A)t} dt = -(sI-A)^{-1}|_0^\infty = (sI-A)^{-1}$, ty $\Re(s) > \sigma(A)$ och hela exponentialen $\to 0$ då $t \to \infty$ pga negativ realdel i exponenten.

Ex. 5: Bestäm e^{At} för $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. **Lösning**: $\mathcal{L}_I(e^{At}) = (sI - A)^{-1} =$
$\dfrac{1}{s^2+s+6} \begin{pmatrix} s-2 & 4 \\ 1 & s-1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5} \begin{pmatrix} \frac{4}{s-2} + \frac{1}{s+3} & \frac{4}{s-2} - \frac{4}{s+3} \\ \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s+3} & \frac{1}{s-2} + \frac{4}{s+3} \end{pmatrix}$, $\Re(s) > 2$. Inverse Laplace:
$e^{At}\theta(t) = \dfrac{1}{5} \begin{pmatrix} 4e^{2t} + e^{-3t} & 4(e^{2t} - e^{-3t}) \\ e^{2t} - e^{-3t} & e^{2t} + 4e^{-3t} \end{pmatrix} \theta(t)$. Pga ID-satsen blir det
$\boxed{e^{At} = \dfrac{1}{5} \begin{pmatrix} 4e^{2t} + e^{-3t} & 4(e^{2t} - e^{-3t}) \\ e^{2t} - e^{-3t} & e^{2t} + 4e^{-3t} \end{pmatrix}}$.

Faltningsekvationer.
Övn 14.53: Finn $g(t)$ sådan att $t = \int_0^t \cos 2(t-\tau)\, g(\tau) d\tau$, $t > 0$.
$t\theta(t) = \theta(t) \int_0^t \cos 2(t-\tau)\, g(\tau) d\tau = \theta \cos 2t \circledast \theta g$, dvs $\mathcal{L}_I t = \mathcal{L}(t\theta) = \dfrac{1}{s^2} = \mathcal{L}_I(\cos 2t) \cdot \mathcal{L}_I g$.
Därmed, $\mathcal{L}_I g = \dfrac{s^2+4}{s^3} = \dfrac{1}{s} + \dfrac{4}{s^3}$ och $\theta(t)g(t) = \theta(t)(1+2t^2)$, dvs $\boxed{g(t) = 1 + 2t^2,\ t > 0}$.

Övn 14.46 Lös $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, med begynnelsevillkor $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.
Lösning: Eftersom matrisen i VL är ej inverterbar, kan man inte ta den lätta vägen. Notera att $[2] - 2[1]$ ger $0 = x - y$, dvs att hela tiden måste lösningen vara sådan att $x(t) = y(t)$. Eftersom begynnelsevillkoren inte uppfyller denna ekvation, så saknas lösningen.