Sammanfattning 14

Fourier & distributioner. Ersätt $\overline{\hat{f}(\omega)}$ i Parsevals formel med $\phi(\omega)$. Dvs $\hat{f}(\omega) = \overline{\phi(\omega)}$. Fouriertransform ger $2\pi f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\overline{\phi(\omega)}d\omega = \overline{\hat{\phi}(-t)}$, dvs $\overline{f(t)} = \frac{1}{2\pi}\hat{\phi}(t)$ och $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega)\phi(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\hat{\phi}(t)dt$. Låt ϕ vara en testfunktion i rummet

$$\mathscr{S} = \left\{\phi \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}),\ \text{och } |t^k D^n \phi| \text{ begränsad för alla } k, n \in \mathbb{N}\right\}$$

Definition: En *tempererad distribution* är en linjär och kontinuerlig avbildning från $\mathscr{S}$ till de komplexa talen.

Definition: Fouriertransformen $\hat{U}$ av en tempererad distribution U definieras via $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{U}(\omega)\phi(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} U(t)\hat{\phi}(t)dt$.

Ex 1: $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\delta}(\omega)\phi(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\hat{\phi}(t)dt = \hat{\phi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)dt$, dvs $< \hat{\delta}, \phi > = < 1, \phi >$.

Ex 2: $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{1}\phi(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} 1\hat{\phi}(\omega)d\omega = 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i0\omega}\hat{\phi}(\omega)d\omega = 2\pi\phi(0)$, dvs $\hat{1} = 2\pi\delta$.

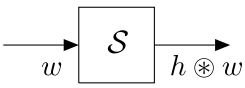
Räkneregler gäller även för distributioner. Man kan Fouriertransformera polynom och andra funktioner, fast inte alla funktioner (t ex saknar e^{t^2} Fouriertransform).

Ex 3: $1 \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta$. Nr 12: $t \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi i\delta'$. Upprepad användning av (12): $t^n \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi i^n \delta^{(n)}$.

Ex 4: $e^{i\omega_0 t} \cdot 1 \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ (Nr 10). Därmed: $\cos\omega_0 t \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi\left(\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right)$.

Ex 5: Finn impulssvaret till $y' + y = \delta$ (insignal δ, utsignalen sökes. Numera välkänd.) $(i\omega + 1)\hat{y} = 1 \Rightarrow \hat{y} = \frac{1}{1 + i\omega} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} y(t) = e^{-t}\theta(t)$.

Samband med in/ut-signal relationer (Sid 286-287).



Faltningsatsen (Fö 13): $\hat{y} = \hat{h} \cdot \hat{w} = H(i\omega)\hat{w}(\omega)$ (Fö 11).
Invers Fourier (Fö 13): $y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}H(i\omega)\hat{w}(\omega)d\omega$.

Definition: Energiinnehållet i en signal: $E(w) = \int_{-\infty}^{\infty} |w(t)|^2 dt \overset{\text{Parseval}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{w}(\omega)|^2 d\omega$.

Ex 6: Låt ett system ha frekvensfunktionen $H(i\omega) = \begin{cases} i\omega, & |\omega| < 1 \\ 0, & |\omega| > 1, \end{cases}$ samt insignalen $w(t) = Ke^{-t}\theta(t)$. Bestäm $E(y)/E(w)$.

$$\begin{aligned} E(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{y}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |H(i\omega)\hat{w}(\omega)|^2 d\omega = \frac{K^2}{2\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\omega^2}{|1 + i\omega|^2} d\omega \\ &= \frac{K^2}{2\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\omega^2}{1 + \omega^2} d\omega = \frac{K^2}{\pi}\int_{0}^{1} \left(1 - \frac{1}{1 + \omega^2}\right) d\omega = \frac{K^2}{\pi}[\omega - \arctan\omega]_0^1 = \frac{K^2}{\pi}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

$E(w) = \int_{0}^{\infty} K^2 e^{-2t} dt = \frac{K^2}{2}$. Därmed, $\frac{E(y)}{E(w)} = \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$.

Laplacetransformationen, kap 14.

Definition: $s \in \mathbb{C}$, $H(s) = (\mathcal{L}h)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}h(t)dt$, Laplacetransformationen av h.

Fördel: Gäller för fler funktioner än Fourier. T ex för icke-stabila system, dvs $h(t) \notin \mathscr{L}_1$.

Ex 7: $(\mathcal{L}\theta)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}\theta(t)dt = \frac{1}{s}$, om $\Re(s) > 0$ (annars existerar inte integralen).

Ex 8: $f(t)=\theta(t)-1$. $(\mathcal{L}f)(s)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}(\theta(t)-1)dt=\frac{1}{s}$, om $\Re(s)<0$ (jfr ovan).

För f kausal, är $(\mathcal{L}f)$ definierad på det högra s-halvplanet; för f *anti*kausal, på det vänstra.

Ex 9: $f(t)=e^{-2|t|}$. $(\mathcal{L}f)(s)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st-2|t|}dt=\int_{-\infty}^{0} e^{(2-s)t}dt+\int_{0}^{\infty} e^{-(2+s)t}dt=$

$=\displaystyle\lim_{T\to-\infty}\left[\frac{e^{t(2-s)}}{2-s}\right]_T^0+\lim_{T\to\infty}\left[\frac{e^{-t(2+s)}}{-(2+s)}\right]_0^T=\frac{1}{2-s}+\frac{1}{2+s}=\frac{4}{4-s^2}$, givet att bägge integraler konvergerar, dvs om $\Re(2-s)>0$ **och** $\Re(2+s)>0$, alltså i strimlan $\boxed{-2<\Re(s)<2}$.

Ex 10: $\mathcal{L}(e^{5t}\theta(t))=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st+5t}\theta(t)dt=\int_{0}^{\infty} e^{-t(s-5)}dt=\frac{1}{s-5}$, om $\Re(s)>5$.

Säg $s=\sigma+i\omega$: $(\mathcal{L}f)(s)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sigma+i\omega)t}f(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}(e^{-\sigma t}f(t))dt=\mathcal{F}(e^{-\sigma t}f(t))(\omega)$.

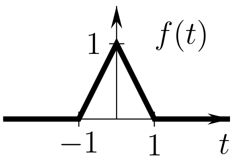
Speciellt för $\sigma=0$, om bägge transformer existerar, $\boxed{(\mathcal{L}f)(i\omega)=\hat{f}(\omega)}$. Dvs Laplaces räkneregler motsvarar Fouriers (**Sats 14.2**, sid 273).

Övn 13.26 Lös $y(t)+\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-u|}y(u)du=te^{-|t|}=y+e^{-|t|}\circledast y$. $\quad\hat{y}+\mathcal{F}(e^{-|t|}\circledast y)=\mathcal{F}(te^{-|t|})$,

dvs $(1+\dfrac{2}{1+\omega^2})\hat{y}=i\dfrac{d}{d\omega}(\dfrac{2}{1+\omega^2})\Rightarrow\hat{y}=\dfrac{-4i\omega(1+\omega^2)}{(1+\omega^2)^2(3+\omega^2)}=i\omega\left(\dfrac{-2}{1+\omega^2}+\dfrac{1}{3}\dfrac{2}{1+(\frac{\omega}{\sqrt{3}})^2}\right)$.

Invers Fourier: $y(t)=\dfrac{d}{dt}\left(-e^{-|t|}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}|t|}\right)\Rightarrow\boxed{y(t)=(e^{-|t|}-e^{-\sqrt{3}|t|})\operatorname{sign}(t)}$ (inga språng; distributionsderivata är den punktvisa derivatan).

Övn 13.31



(a) Fouriertransform: $\hat{f}(\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}f(t)dt=\int_{-1}^{1}\cos\omega t f(t)dt=$

$2\displaystyle\int_0^1\cos\omega t(1-t)dt=\left[\frac{-2\cos\omega t}{\omega^2}\right]_0^1=2\frac{1-\cos\omega}{\omega^2}=\left(\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right)^2$.

(b) $i(t)=I_0(\frac{\sin t}{t})^2$. Energiförlusten ges av $E=RI_0^2\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin t}{t})^4dt\stackrel{t=\omega/2}{=}\frac{RI_0^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}})^4d\omega$

$\stackrel{\text{Parseval}}{=}\pi RI_0^2\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f^2(t)dt=2\pi RI_0^2\int_0^1(1-t)^2(t)dt=\frac{2\pi}{3}RI_0^2$.

Övn 13.38 (jfr s 281) Diracs staket (eller Diracs kam).

(a) Låt $f(t)$ vara en lagom snäll funktion, $T>0$ och $\mathscr{W}(t)=\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$. Produkten

$f_s(t)=f(t)\mathscr{W}(t)=\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-kT)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(kT)\delta(t-kT)$ kan betraktas som en "sampling" av f. Man kan okcså uttrycka $\mathscr{W}(t)$ med en Fourierserie (den är periodisk med period T) och därefter få ett annat serieuttryck för f_s. $c_k(\mathscr{W})=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}e^{-ik\Omega t}\delta(t)dt=\frac{1}{T}$.

$\mathscr{W}(t)=\dfrac{1}{T}\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{ik\Omega t}$, där $\Omega T=2\pi$. Därefter, $\boxed{f_s(t)=\dfrac{1}{T}\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(t)e^{ik\Omega t}}$.

(b) Fouriertransformera bägge uttryck: $\hat{f}_s(\omega)=\dfrac{1}{T}\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega-\frac{2k\pi}{T})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(kT)e^{-ikT\omega}$.

(c) Ur sista likheten (kallas **Poissons summationsformel**) syns att $\hat{f}_s(\omega)$ är periodisk.

(d) Anta att $\hat{f}_s(\omega) = 0$, då $|\omega| \geq B$ (f_s sägs ha ändlig bandbredd B). Anta också att $B < \pi/T = \Omega/2$. Vi visar då att $T\hat{f}_s(\omega) = \hat{f}(\omega)$, då $|\omega| \leq \Omega/2$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{För } k \geq 1,\ \omega - k\Omega < \Omega/2 - \Omega = -\Omega/2 < -B \\ \text{För } k \leq -1,\ \omega - k\Omega < \Omega/2 + \Omega = \Omega/2 > B. \end{array}\right\} \text{ I bägge fall är } \omega - k\Omega \text{ utanför } [-B, B]. \text{ Bara } k = 0 \text{ räknas!}$$

Dvs $\boxed{\hat{f}_s(\omega) = \frac{1}{T}\hat{f}(\omega), \text{ då } |\omega| \leq \Omega/2}$, enligt vänsterleden i Poissons summationsformeln.

Med andra ord, $\hat{f}(\omega) = T\hat{f}_s(\omega)\left(\theta(\omega + \frac{\Omega}{2}) - \theta(\omega - \frac{\Omega}{2})\right)$, för alla ω.

(e) Vi använder högerleden i Poissons summationsformel:

$\hat{f}(\omega) = T\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)e^{-ikT\omega} \cdot \left(\theta(\omega + \frac{\Omega}{2}) - \theta(\omega - \frac{\Omega}{2})\right)$, Invers Fourier, formelblad nr (20):

$\theta(t + a) - \theta(t - a) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\dfrac{\sin a\omega}{\omega} \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\left(\theta(t + a) - \theta(t - a)\right)$, dvs

$\mathcal{F}^{-1}(\theta(\omega + a) - \theta(\omega - a)) = \dfrac{\sin at}{\pi t}$.

Via skalning och förskjutning fås $\mathcal{F}^{-1}(e^{-ib\omega}(\theta(\omega + a) - \theta(\omega - a)) = \dfrac{\sin a(t - b)}{\pi(t - b)}$, därmed,

$\boxed{f(t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)\frac{\sin\frac{\Omega}{2}(t - kT)}{\frac{\Omega}{2}(t - kT)}}$, där $\Omega T = 2\pi$.