Sammanfattning 13

Övn 13.12 $\mathcal{F}$ har också egenvärden och egenfunktioner:
$u_0(x) = e^{-x^2/2} = e^{-(x/\sqrt{2})^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \sqrt{2}\sqrt{\pi}e^{-(\sqrt{2}\zeta)^2/4} = \sqrt{2\pi}e^{-\zeta^2/2}$.
$u_1(x) = xe^{-x^2/2} \xrightarrow{\mathcal{F}} i\dfrac{d}{d\zeta}\sqrt{2\pi}e^{-\zeta^2/2} = -i\sqrt{2\pi}\zeta e^{-\zeta^2/2}$.

Sats 13.3 $f \in \mathscr{L}_1 \Rightarrow$ (a) $\hat{f}(\omega)$ är kontinuerlig och begränsad. (b) $\hat{f}(\omega) \underset{\omega\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Bevis (a) $|\hat{f}(\omega)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-i\omega t} f(t)|dt \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt \le |f(t)|$.
(b) Se sid. 266, successiv approximation via trappfunktioner.
Notera: Om $D^n f \in \mathscr{L}_1$, så är $\mathcal{F}(D^n f) = (i\omega)^n \hat{f}(\omega)$ begränsad. Därmed $|\hat{f}(\omega)| \le \frac{C}{|\omega|^n}$.

Fouriers inversionsformel, se bevis s 266, 267:

$$\boxed{\boxed{f \in \mathscr{L}_1 \Rightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega}}.$$

Inversionsformeln och tabellen: Läs tabellen i omvänd riktning!
Ex 1: $\mathcal{F}(e^{-|t|}) = \dfrac{2}{1+\omega^2} \Rightarrow \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{2e^{i\omega t}}{1+\omega^2}d\omega = e^{-|t|}$.
Notera: $f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi f(-t)$ eftersom $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\hat{f}(\omega)d\omega = 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(-t)}\hat{f}(\omega)d\omega =$ $2\pi f(-t)$ pga inversionsformeln. Dvs att om man läser tabellen åt andra hållet, byter $t \to -t$ och multiplicerar med 2π så är även detta en Fouriertransform.

Ex 2: Bestäm $\mathcal{F}(\dfrac{\sin t}{t})$. Se tabellen: $\theta(t+1)-\theta(t-1) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\dfrac{\sin\omega}{\omega} \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\left(\theta(1-t)-\theta(-1-t)\right)$
dvs $\boxed{\mathcal{F}(\dfrac{\sin t}{t}) = \pi\left(\theta(\omega+1)-\theta(\omega-1)\right)}$.

Ex 3: Finn en Fouriertransformerbar lösning till $y' + y = e^{-2t}\theta(t) = e^{-2t}\theta(2t)$. Transformera ekvationen: $(1+i\omega)\hat{y} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+i(\omega/2)} = \dfrac{1}{2+i\omega}$ (nr 16 och skalning). Dvs, $y(t) =$ $\mathcal{F}^{-1}(\dfrac{1}{(1+i\omega)(2+i\omega)}) = \mathcal{F}^{-1}(\dfrac{1}{1+i\omega} - \dfrac{1}{2+i\omega}) = e^{-t}\theta(t) - e^{-2t}\theta(2t) = \boxed{(e^{-t} - e^{-2t})\theta(t)}$.

Sats 13.5 (Faltningssatsen): $\mathcal{F}(f \circledast g) = \mathcal{F}(f)\cdot\mathcal{F}(g)$, om $f, g \in \mathscr{L}_1$. **Bevis**:
$$\mathcal{F}(f \circledast g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)f(\tau)d\tau dt =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau}f(\tau)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-\tau)}g(t-\tau)dt\right)d\tau = \mathcal{F}(f)\cdot\mathcal{F}(g).$$

Ex 4: $f(t) = e^{-t}\theta(t)$, $g(t) = e^{-2t}\theta(t)$. Beräkna $f \circledast g$. (a) Direkt via definitionen: gör själv!
(b) Via satsen ovan: $f \circledast g = \mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(f)\cdot\mathcal{F}(g)\right) = \mathcal{F}^{-1}(\frac{1}{1+i\omega}\cdot\frac{1}{2+i\omega}) = (e^{-t} - e^{-2t})\theta(t)$.

Sats 13.6 (Parseval): Om $f, g \in \mathscr{L}_2$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(t)}g(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\hat{f}(\omega)}\hat{g}(\omega)d\omega$. Speciellt, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(\omega)|^2d\omega$. **Bevis**: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(t)}g(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(t)}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(\omega)e^{i\omega t}d\omega\right)dt =$ $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(t)}\,\overline{e^{-i\omega t}}dt\right)\hat{g}(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\hat{f}(\omega)}\hat{g}(\omega)d\omega$ (om man får byta integrationsföljden). Se sid 272.

Ex 5: Beräkna $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\frac{\sin t}{t}dt = \int_{-\infty}^\infty \underbrace{e^{-t}\theta(t)}_{\overline{f(t)}} \cdot \underbrace{\frac{\sin t}{t}}_{g(t)} dt = [\text{Parseval}] =$

$\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \overline{\frac{1}{1+i\omega}} \cdot \pi \left(\theta(\omega+1) - \theta(\omega-1)\right) d\omega = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{d\omega}{1-i\omega} = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{1+i\omega}{1+\omega^2}d\omega =$
$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\omega^2}d\omega = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$

Övn 13.14: Givet att $f'(x) + f(x) + f(x+2) = \dfrac{1}{1+x^2}$, bestäm $\hat{f}(\zeta)$·
$i\zeta\hat{f} + \hat{f} + e^{i2\zeta}\hat{f} = \pi e^{-|\zeta|} \Rightarrow \hat{f}(\zeta) = \dfrac{\pi}{1+i\zeta+e^{i2\zeta}}e^{-|\zeta|}.$
Notera att nämnaren är alltid skild från noll. Man bör alltid kolla sådana saker, för att säkerställa validitetsdomänen hos svaret.

En teknik vi kommer att använda ofta i problemlösning är följande:

$\boxed{\text{Problem i tiden}} \xrightarrow{\mathcal{F}} \boxed{\text{Frekvensproblem}} \xrightarrow{\text{Lösning}} \boxed{\text{Löst frekvensproblem}} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \boxed{\text{Löst problem i tiden}}$