Sammanfattning 12

Låt $H(s) = \dfrac{1}{4+(s+\frac{1}{10})^2}$. För vilka ω är $A(\omega)$ störst? Snabbt svar: Ungefär närmast polerna i $H(s)$. H:s poler ligger i $s = -\frac{1}{10} \pm 2i$, vi förväntar oss $\omega = \pm 2$.
$A(\omega) = |H(i\omega)| = |\dfrac{1}{4+(i\omega+\frac{1}{10})^2}| = \dfrac{1}{\sqrt{(4.01-\omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{25}}}$, med max vid $\omega = \pm\sqrt{3.99}$.

Sats 12.5 Låt $\mathcal{S}$ vara ett lineärt, tidsinvariant och stabilt system, med överföringsfunktion $H(s)$. $w(t)$ T-periodisk $\Rightarrow$ $y(t)$ T-periodisk. **Troliggörande**: Om alla serier konvergerar,

$$w(t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} c_k(w)e^{ik\Omega t} \xrightarrow{\mathcal{S}} y(t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} c_k(w)H(ik\Omega)e^{ik\Omega t} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} c_k(w)A(k\Omega)e^{i(k\Omega t+\varphi(k\Omega))}.$$

Notera: Alla frekvenser i utsignalen har sitt ursprung i insignalen.

Övn 12.18 Kan $\mathcal{S}$ vara lineärt och tidsinvariant?

$$2\sin t - 3\cos^2 t \longrightarrow \boxed{\mathcal{S}} \longrightarrow 5\cos t + 2\sin 2t - 4\cos 3t$$

Svar: Nej ty $y(t)$ innehåller frekvensen 3 som inte finns i insignalen.

Övn 12.3 $\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bw \\ y &= Cx + Dw \end{cases}$, där $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & -6 \end{pmatrix}$ och $D = 2$. Bestäm $H(s)$.
Svar: Se (40) i formelsamlingen och **Sats 12.3**: $H(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$, med poler i $s = -1,\ 5$. Fysikalisk signifikans innebär att x_h kan försummas vid sidan av x_p, där $x_h = c_1e^{-t}S_1 + c_2e^{5t}S_2$. $H(s)$ är signifikant då $\Re(s) > 5$.

Kap 13: Fouriertransformationen

Enligt definitionen är $H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\tau}h(\tau)d\tau$ eller $H(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau}h(\tau)d\tau$.
Definition: Fouriertransformation $\hat{f}(\omega) \equiv (\mathcal{F}f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau}f(\tau)d\tau$.
Ex 1: $f(t) = \theta(t+a) - \theta(t-a)$. $\hat{f}(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}(\theta(t+a) - \theta(t-a))dt = \int_{-a}^{a} e^{-i\omega t}dt =$
$\begin{cases} 2a, & \omega = 0 \\ 2a\frac{\sin\omega a}{\omega a}, & \omega \neq 0 \end{cases}$.

Ex 2: $f(t) = e^{-t^2} \to \hat{f}(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t - t^2}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t^2+i\omega t-\frac{\omega^2}{4}+\frac{\omega^2}{4})}dt = e^{-\frac{\omega^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t+\frac{i\omega}{2})^2}dt =$
$\sqrt{\pi}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$ (se sammanfattning 9 samt sid 277 i Flerdim boken).

Ex 3: $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \to \hat{f}(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{1+t^2}dt = \left[\begin{array}{c}\text{Residykalkyl} \\ \textbf{Sats 13.3}, \\ \text{Funktionsteori}\end{array}\right] \begin{cases} 2\pi i \ \mathrm{Res}_{z=i}\frac{e^{-i\omega z}}{1+z^2}, & w \leq 0 \\ -2\pi i \ \mathrm{Res}_{z=-i}\frac{e^{-i\omega z}}{1+z^2}, & w \geq 0 \end{cases} =$
$= [\text{Regel } 4] = \begin{cases} \pi e^{\omega}, & w \leq 0 \\ \pi e^{-\omega}, & w \geq 0 \end{cases} = \pi e^{-|\omega|}.$

Ex 4: $f(t) = e^{-|t|} \to \hat{f}(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t - |t|}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-i\omega t + t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-i\omega t - t}dt =$
$\left[\frac{e^{t(1-i\omega)}}{1-i\omega}\right]_{-\infty}^{0} - \left[\frac{e^{-t(1+i\omega)}}{1+i\omega}\right]_{0}^{\infty} = \frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega} = \frac{2}{1+\omega^2}.$
Obs! Det finns olika saker som bär namnet ”Fourier”, t ex för periodiska funktioner $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ikt}$, där $c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}f(t)dt$.

Räknelagar

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} c_1 \hat{f}_1(\omega) + c_2 \hat{f}_2(\omega) \tag{1}$$

$$f(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|}\hat{f}(\omega/a) \tag{2}$$

$$f(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-i\omega t_0}\hat{f}(\omega) \tag{3}$$

$$e^{i\omega_0 t} f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\omega-\omega_0) \tag{4}$$

$$\overline{f(t)} \xrightarrow{\mathcal{F}} \overline{\hat{f}(-\omega)} \tag{5}$$

$$\frac{df}{dt} \xrightarrow{\mathcal{F}} i\omega \hat{f}(\omega) \tag{6}$$

$$tf(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} i\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega) \tag{7}$$

Bevis av (2): Variabelsubstitution. En följd är att jämna funktioner har jämn Fouriertransform och udda funktioner har udda fouriertransform (använd $a=-1$).
Bevis av (6): Om både $f, f' \in \mathscr{L}_1$, så måste $f(t)$ ha gränsvärde noll vid $\pm\infty$. Detta och partiell integration fullföljer beviset. Se s. 256-258 samt övningshäftet.

Ex 5: $f(t) = e^{-2(t-7)^2}$. Tabellträning! $e^{-t^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \sqrt{\pi}e^{-\omega^2/4}$

$e^{-2t^2} = e^{-(\sqrt{2}t)^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\pi}e^{-(\omega/\sqrt{2})^2/4} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\omega^2/8}$

$e^{-2(t-7)^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-i7\omega}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\omega^2/8}$.

Övn 13.10 Transformera $f(x) = e^{-4x^2}\cos 3x$.

$e^{-4x^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-\zeta^2/16}$

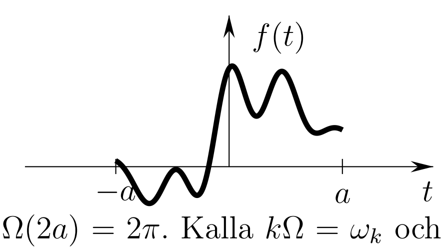
$e^{-4x^2}e^{3ix} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-(\zeta-3)^2/16}$

$e^{-4x^2}e^{-3ix} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-(\zeta+3)^2/16}$

$e^{-4x^2}\cos 3x \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\sqrt{\pi}}{4}\left(e^{-(\zeta-3)^2/16} + e^{-(\zeta+3)^2/16}\right)$.

Samband med Fouriertransform av periodiska funktioner.

Ur en snäll funktion $f(t)$ definierad i $[-a,a]$ kan en periodisk funktion f_T definieras genom att upprepa grafen över hela $\mathbb{R}$. Fourierkoefficienterna för f_T återfinns i $\hat{f}(\omega)$: $c_k(f_T) = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} e^{-ik\Omega t}f(t)dt = \frac{1}{2a}\hat{f}(k\Omega)$.



För $t \in [-a,a]$, $f_T(t) = f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a}\hat{f}(k\Omega)e^{ik\Omega t}$, där $\Omega(2a) = 2\pi$. Kalla $k\Omega = \omega_k$ och därmed $\Delta\omega = \omega_{k+1} - \omega_k = \Omega$. Likheten ovan blir: $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\hat{f}(\omega_k)e^{i\omega_k t}\Delta\omega$, vilket är en Riemannsumma av $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$. I nästa avsnitt kommer vi att känna igen detta som **Fouriers inversionsformel**.