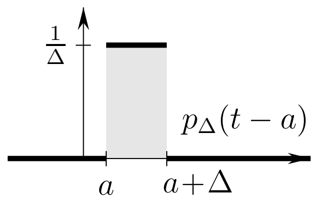
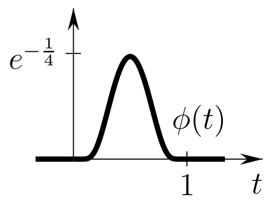
Sammanfattning 10

Generaliserade Funktioner: Vi vill definiera en objekt som bevarar enhetspulsens $p_\Delta(t) = \frac{1}{\Delta}(\theta(t) - \theta(t - \Delta))$ egenskaper då $\Delta \to 0^+$:
(a) $p_\Delta(t) = 0$ för $t \notin [0, \Delta]$.
(b) $\int_{-\infty}^{\infty} p_\Delta(\tau)d\tau = 1$.
(c) För varje a, $p_\Delta(t - a) = T_a(p_\Delta)$ uppfyller
$$\int_{-\infty}^{\infty} p_\Delta(\tau - a)w(\tau)d\tau = \frac{1}{\Delta}\int_a^{a+\Delta} w(\tau)d\tau = w(a + \zeta\Delta)$$
för $0 \le \zeta \le 1$ (medelvärdesatsen). Då $\Delta \to 0^+$, $w(a + \zeta\Delta) \to w(a)$.



Kalla $\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0^+} p_\Delta(t)$. Av δ vill vi att den skall vara noll utanför origo, med enhetsarea och att $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)w(\tau)d\tau = w(0)$. Låt oss precisera detta.

Definition(testfunktion): $\mathcal{D}$ kallas mängden av testfunktioner ϕ som är noll utanför en begränsad mängd (har *kompakt stöd*) och kan deriveras ett obegränsat antal gånger. **Ex 1:** $\phi(t) = e^{\frac{1}{t(t-1)}}(\theta(t) - \theta(t - 1))$.



Definition(Distribution U över $\mathcal{D}$): En lineär, kontinuerlig avbildning som till varje testfunktion ordnar ett tal. Vi skriver $< U, \phi >= \int_{-\infty}^{\infty} U(\tau)\phi(\tau)d\tau$.

Ex 2: Vanliga funktioner kan fungera som distributioner: $< U_f, \phi >= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\phi(\tau)d\tau$. Till detta duger t ex $f(t) = e^t$.

Ex 3: δ, Diracs "deltafunktion" definieras genom $< \delta, \phi >= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\phi(\tau)d\tau = \phi(0)$. På samma sätt är: $< \delta_a, \phi >=< T_a\delta, \phi >= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - a)\phi(\tau)d\tau = \phi(a)$.

Definition $U = V \Leftrightarrow$ för alla $\phi \in \mathcal{D}$, $\quad < U, \phi >=< V, \phi >$. Obs! om $U(t)$, $V(t)$ är funktioner, kan de vara "obetydligt" olika, bara att de har samma integral mot alla ϕ (t ex om funktionerna skiljer sig i en t-mängd med "area noll").

Derivation: Om $U(t)$ ges av en deriverbar funktion f kan man betrakta distributionen som ges av f' via: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f'(\tau)\phi(\tau)d\tau = [f(t)\phi(t)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\phi'(\tau)d\tau = -\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\phi'(\tau)d\tau$ ty ϕ har kompakt stöd.

Definition (distributionsderivata): Definieras genom $< U', \phi >= -< U, \phi' >$.

Ex 4: Distributionsderivatan av θ. Vi har $< \theta, \phi >= \int_{-\infty}^{\infty} \theta(\tau)\phi(\tau)d\tau = \int_0^{\infty} \phi(\tau)d\tau$. Derivatan ges av: $< \theta', \phi >= -\int_{-\infty}^{\infty} \theta(\tau)\phi'(\tau)d\tau = -\int_0^{\infty} \phi'(\tau)d\tau = -[\phi(t)]_0^{\infty} = \phi(0)$. Dvs $\theta' = \delta$ i distributionsmening.

Räkneregler: $(U + V)' = U' + V'$. För en lagom hygglig funktion f, $(fU)' = f'U + fU'$.

Ex 5: $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$ (använd definitionen i integralform).

Ex 6: $f(t) = e^t + \cos(2t)$. Förenkla $f(t)\delta(t)$. Svar: $f(t)\delta(t) = 2\delta(t)$.

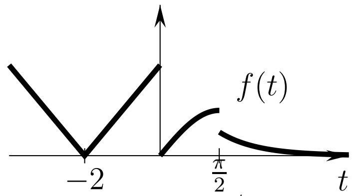
Ex 7: $(2e^{-t}\theta(t))' = -2e^{-t}\theta(t) + 2e^{-t}\delta(t) = 2\delta(t) - 2e^{-t}\theta(t)$. Dvs: Man deriverar punktvis (som med vanliga funktioner) och kompenserar för språnget.

Ex 8: $f(t) = f_1(t)(1 - \theta(t - a)) + f_2(t)\theta(t - a)$. Bestäm distributionsderivatan U_f'.
$< U_f', \phi >= -\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\phi'(\tau)d\tau = -\int_{-\infty}^{a} f_1(\tau)\phi'(\tau)d\tau - \int_a^{\infty} f_2(\tau)\phi'(\tau)d\tau = [\text{P.I.}] =$
$(f_2(a) - f_1(a))\phi(a) + \int_{-\infty}^{a} f_1'(\tau)\phi(\tau)d\tau + \int_a^{\infty} f_2'(\tau)\phi(\tau)d\tau$, dvs
$\boxed{U_f' = (f_2(a) - f_1(a))\delta(t - a) + f_1'(t)(1 - \theta(t - a)) + f_2'(t)\theta(t - a)}$.

Sats 11.4 (s 212): f styckvis glatt med brytpunkter $t_1, \cdots, t_m$ och språng $\sigma_1, \cdots, \sigma_m$: $U_f' = f'[\text{punktvis}] + \sum_{i=1}^{m} \sigma_i \delta(t - t_i)$.

Övn 11.9: $f(t) = -(t{+}2)(1-\theta(t{+}2))+(t{+}2)(\theta(t{+}2)-\theta(t))+\sin(t)(\theta(t)-\theta(t-\frac{\pi}{2}))+e^{-t}\theta(t-\frac{\pi}{2})$. Derivera!

$$f'(t) = \begin{cases} -1, & t < -2 \\ 1, & -2 < t < 0 \\ \cos(t), & 0 < t < \pi/2 \\ -e^{-t}, & t > \pi/2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{språng} = -2. \\ \leftarrow \text{språng} = e^{-\pi/2} - 1. \\ \end{array}$$



$U_f'(t) = \theta(t{+}2)-1+\theta(t{+}2)-\theta(t)+\cos(t)(\theta(t)-\theta(t-\frac{\pi}{2}))-e^{-t}\theta(t-\frac{\pi}{2})-2\delta(t)+(e^{-\pi/2}-1)\delta(t-\frac{\pi}{2})$.

Ex 9: $< \delta', \phi > = - < \delta, \phi' > = -\phi'(0)$ (använd definitionen). För $f \in \mathcal{C}^\infty$ är produkten $f(t)\delta'(t)$ meningsful. Enligt definitionen, $(f(t)\delta(t))' = f(t)\delta'(t) + f'(t)\delta(t)$, dvs $(f(0)\delta(t))' = f(t)\delta'(t) + f'(0)\delta(t)$. Därmed, $\boxed{f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)}$.

Ex 10: Beräkna U_f'', för $f(t) = (1 + e^{2t})\theta(t)$.
$U_f' = 2e^{2t}\theta(t) + (1 + e^{2t})\delta(t) = 2e^{2t}\theta(t) + 2\delta(t)$.
$U_f'' = 4e^{2t}\theta(t) + 2e^{2t}\delta(t) + 2\delta'(t) = 4e^{2t}\theta(t) + 2\delta(t) + 2\delta'(t)$.

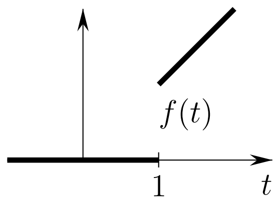
Primitiver. Till varje distribution U finns en primitiv V sådan att $V' = U$. Även $V + c$, där c är en konstant, är primitiv till U.

Ex 11: $(\theta + c)' = \delta$.

Ex 12: Bestäm en primitiv F till $f(t) = t\theta(t-1)$.
Notera: f har inga δ, därmed har F inga språng.

$$F(t) = \begin{Bmatrix} c_1, & t < 1 \\ \frac{t^2}{2} + c_2, & t > 1 \end{Bmatrix} \text{ Inga språng: } c_1 = \tfrac{1}{2} + c_2.$$

$F(t) = C + \frac{1}{2}(t^2 - 1)\theta(t-1)$.



Ex 13: Bestäm impulssvaret till systemet $y'(t) + \dfrac{1}{RC}y(t) = \dfrac{1}{RC}w(t)$ (lågpassfilter igen!)
Svar: Insignalen är en impuls, dvs $w = \delta$. Sökes: En kausal lösning. Integrerande faktor:
$e^{t/RC}y'(t) + e^{t/RC}\dfrac{1}{RC}y(t) = e^{t/RC}\dfrac{1}{RC}\delta(t)$, dvs $\dfrac{d}{dt}(e^{t/RC}y(t)) = e^{t/RC}\dfrac{1}{RC}\delta(t) = \dfrac{1}{RC}\delta(t)$.

$e^{t/RC}y(t) = \dfrac{1}{RC}\theta(t) + C$. Kausallösning kräver $C = 0$, så att $y(t < 0) = 0$, eftersom $w(t < 0) = 0$ (insignalen är en δ-funktion). Svar:

$\boxed{y(t) = \dfrac{1}{RC}e^{-t/RC}\theta(t)}$ (som bekant från tidigare).