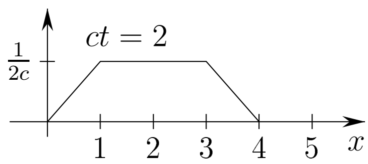
Svar till några gamla skrivningar

1998-08-24

1. $u(x,t) = \dfrac{1}{2} - \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \sin\frac{k\pi}{2} e^{-k^2\pi^2 t/4} \cos\frac{k\pi x}{2}$

2. a)



b) Låt $u(x,t),\ x \geq 0, t \geq 0$ vara strängens utböjning. Då är $u(3,t) = 0$ om $ct < 1$ eller $ct > 5$

3. a) Vi känner igen $\mathcal{A}$ som en Sturm-Liouvilleoperator och vet att $\mathcal{A}$ är självadjungerad i skalärprodukten

$$(u \mid v)_w = \int_{-1}^{1} \overline{u(x)} v(x) \, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

4. a) $u(x,t) = e^{-\alpha t} \dfrac{1}{\sqrt{4\pi a t}} e^{-x^2/4at}$

b) Ekvationen kan beskriva värmeledning i en tunn lång (oändlig) stav som ej är perfekt isolerad. Värme läcker till omgivningen, som har temperaturen 0°, enligt Newtons avsvalningslag. Vid tiden $t = 0$ sker en explosionsartad värmeutveckling i punkten $x = 0$.

5. a) $-\dfrac{1}{4\pi} \ln \dfrac{((x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2)((x+\alpha)^2 + (y+\beta)^2)}{((x-\alpha)^2 + (y+\beta)^2)((x+\alpha)^2 + (y-\beta)^2)}$

b) Lösningen ges av $u = u_A + u_B$, där

$$u_A(x,y) = -\frac{1}{4\pi} \ln \frac{((x-1)^2 + (y-1)^2)((x+1)^2 + (y+1)^2)}{((x-1)^2 + (y+1)^2)((x+1)^2 + (y-1)^2)}$$

och

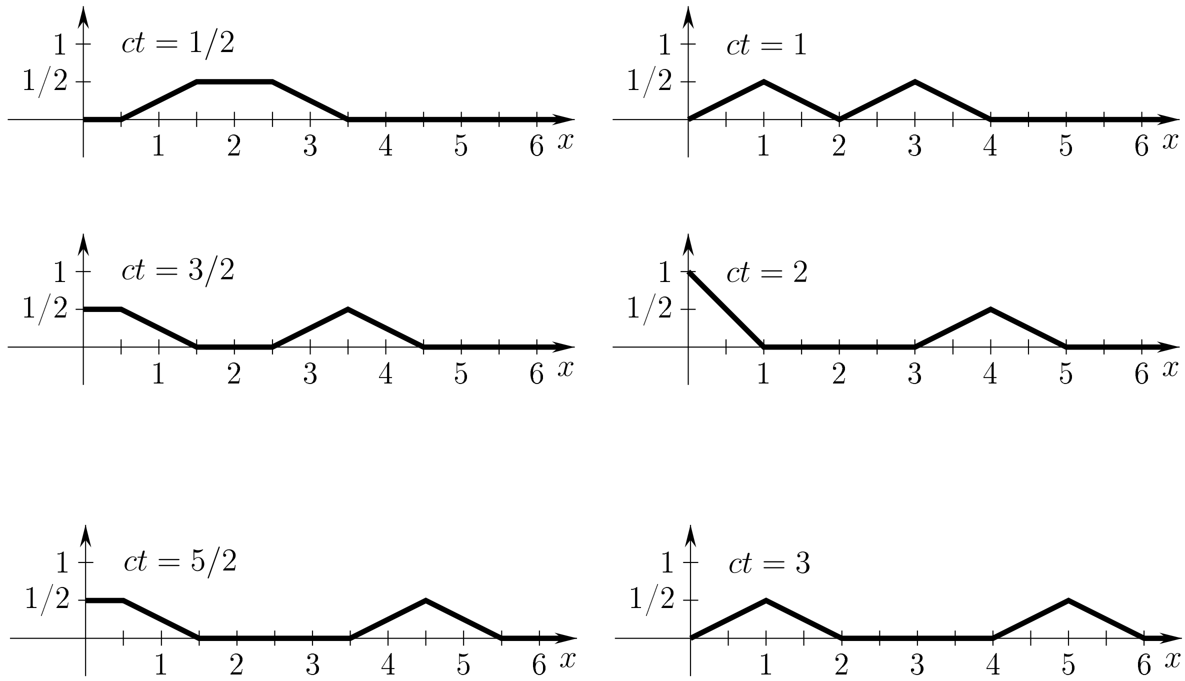
$$u_B(x,y) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{x^2 + (y-1)^2} - \frac{x}{x^2 + (y+1)^2}\right)$$

6. Egenvinkelfrekvenser: $\omega_{kn} = c\sqrt{\lambda_{kn}} = c\dfrac{\alpha_{k\pi/v,n}}{\rho}$, $\quad k, n = 1, 2, \ldots$

Svängningsmoder: $J_{k\pi/v}(\alpha_{k\pi/v,n}\dfrac{r}{\rho}) \sin\dfrac{k\pi\theta}{v}$

1999-06-05

1.



För $ct > 3$ kommer de båda trianglarna att förflytta sig åt höger med hastigheten c.

2. $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x - \dfrac{1}{2}$ och $p(x) = \dfrac{4}{5}x - \dfrac{1}{5}$. Minimala värdet blir $\dfrac{4}{225}$.

3. Modell

$$\begin{cases} u_t - au_{xx} = \delta_{1/2}(x), & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

Lösning

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\sin(k\pi/2)}{k^2\pi^2}(1 - e^{-k^2\pi^2 t}) \sin k\pi x$$

4. Då $x > 0$, $t > 0$ är

$$u(x,t) = 1 - \frac{x}{2}\left(\operatorname{erf}\frac{x+1}{\sqrt{4at}} - \operatorname{erf}\frac{x-1}{\sqrt{4at}}\right) - \frac{\sqrt{at}}{\sqrt{\pi}}\left(e^{-(x+1)^2/4at} - e^{-(x-1)^2/4at}\right)$$

5. a) Operatorn är $\mathcal{A} = -\Delta$ med definitionsmängden

$$D_{\mathcal{A}} = \left\{ u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \mid \Omega = \text{enhetscirkeln},\ u = 0 \ \text{ på } \ \partial\Omega \right\}$$

b) Funktionen $P(r, \theta)$ är lösning till

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{i } \ \Omega \\ u(1, \theta) = \delta(\theta) & \text{på } \ \partial\Omega \end{cases}$$

Det allmännare problemet är

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{i } \ \Omega \\ u(1, \theta) = g(\theta) & \text{på } \ \partial\Omega \end{cases}$$

Lösningen kan skrivas

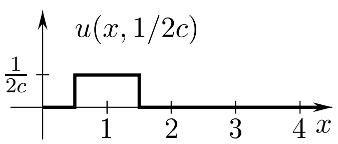
$$u(r, \theta) = P * g(r, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} P(r, \theta - \alpha) g(\alpha)\, d\alpha$$

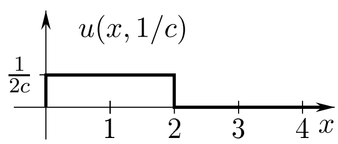
6. Lösningen är

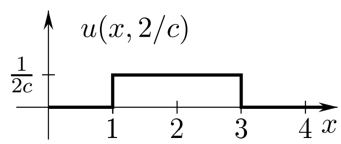
$$u(r, \theta) = \frac{1}{5}(r + 4r^{-2}) \cos\theta + \frac{32}{635}\left(r^3 - r^{-4}\right)\left(\frac{5}{2}\cos^3\theta - \frac{3}{2}\cos\theta\right)$$

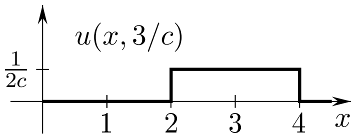
2000-05-31

1. Fysikalisk tolkning: u är utböjningen av en mycket lång (halvoändlig) elastisk sträng som är fast inspänd i änden ($x = 0$) och ej påverkas av några yttre krafter. Vid tiden 0 är strängen rak och i vila. Den träffas då av ett hammarslag (spetsig hammare) i punkten $x = 1$, vinkelrätt mot strängen. Vågutbredningshastigheten i strängen är c.
Speciellt fås









Därefter fortsätter vågen med oförändrad form åt höger med hastigheten c.

2. a) Skalärprodukt $= \int_0^1 \overline{u(r)} v(r)\, r dr$

c) Egenvärden och egenfunktioner är $\boxed{\lambda_k = \alpha_{0k}^2 \text{ resp } \varphi_k(r) = J_0(\alpha_{0k} r)}$

d) Dessa egenfunktioner kan exempelvis användas för att beräkna rörelsen hos ett cirkulärt fast inspänt membran med radie 1 om begynnelsevillkor (och eventuell kraftfördelning) är cirkulärt symmetriska.

3. Modellen är

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = -cu \ , & 0 < x < L \ , \ t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \ , & t > 0 \\ u(x,0) = M\delta(x - L/2) \ , & 0 < x < L \end{cases}$$

Här är $D > 0$ diffusionskonstanten och $c > 0$ sönderfallskonstanten.
Lösningen är

$$\boxed{u(x,t) = \frac{M}{L} e^{-ct} + \frac{2M}{L} e^{-ct} \sum_{k=1}^{\infty} \cos(k\pi/2) e^{-Dk^2\pi^2 t/L^2} \cos(k\pi x/L) \ .}$$

4. $\boxed{u(x,t) = T_0 + (T_1 - T_0)\, \text{erf}(x/\sqrt{4at}),\ x > 0,\ t > 0}$

Problemet kan beskriva värmeledning i en lång (halvoändlig) stav som är isolerad utom i ändpunkten ($x = 0$). Från början ($t = 0$) har hela staven temperaturen $u = T_1$. Vid starttiden ges ändpunkten ($x = 0$) temperaturen T_0 och hålls därefter vid denna temperatur. Eftersom $\text{erf}(0) = 0$ och $\text{erf}(\infty) = 1$ fås $\lim_{t\to\infty} u = T_0$, $\lim_{t\to 0} u = T_1$, $\lim_{x\to 0} u = T_0$, $\lim_{x\to\infty} u = T_1$. Alla dessa gränsvärden stämmer med den fysikaliska tolkningen.

5. a) M_1 är ett linjärt rum men inte M_2.

b) Se läroboken sid 161–162.

6. a) Uttryckt i sfäriska koordinater är modellen (u är temperaturen)

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 \ , & 0 < r < 1,\ 0 < \theta < \pi,\ 0 < \phi < 2\pi \\ u(1,\theta,\phi) = \begin{cases} 100 \ , & 0 < \theta < \pi/2,\ 0 < \phi < 2\pi \\ 0 \ , & \pi/2 < \theta < \pi,\ 0 < \phi < 2\pi \end{cases} \end{cases}$$

$$\boxed{u(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell r^\ell P_\ell(\cos(\theta)) \ , \text{ där } a_\ell = \frac{\int_0^1 100 P_\ell(s)\, ds}{\int_{-1}^1 P_\ell^2(s)\, ds}}$$

b) Problemet kan också lösas med Greenfunktioner. Greenfunktionen för Dirichlets problem för enhetsklotet är $G(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\alpha}) = K(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\alpha}) - K(\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{\alpha}}))$, där $K(\boldsymbol{x}) = 1/(4\pi|\boldsymbol{x}|)$ är fundamentallösningen i $\mathbb{R}^3$. Temperaturen u beräknas sedan med huvudsatsen för Greenfunktioner:

$$u(\boldsymbol{x}) = -\oint_{|\boldsymbol{\alpha}|=1} \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\alpha}}} g(\boldsymbol{\alpha}) dS_{\boldsymbol{\alpha}} \,.$$

Här är den utåtriktade normalen radiellt riktad, dvs $\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha}$. Vidare är $dS_{\boldsymbol{\alpha}}$ areaelementet på enhetssfären och g är temperturen på randen.