

KONTINUERLIGA SYSTEM, några viktiga begrepp och metoder

Fysikaliska modeller

Kontinuitetsekvationen: $q_t + \operatorname{div} \mathbf{j} = k$ kommer från ökning + utflöde = nyproduktion. Här är q = densitet (mängd/m³), \mathbf{j} = strömtäthet (mängd/m²s) och k = källtäthet (mängd/m³s)

Diffusionsekvationen: $q_t - D\Delta q = k$ fås ur kontinuitetsekvationen och Fick's lag $\mathbf{j} = -D \operatorname{grad} q$. D kallas diffusionskonstanten.

Värmeledningsekvationen: $\rho c u_t - \lambda \Delta u = k$ fås på samma sätt som diffusionsekvationen. Energidensiteten q och temperaturen u kopplas ihop genom $q_t = \rho c u_t$. Motsvarigheten till Fick's lag är Fouriers lag $\mathbf{j} = -\lambda \operatorname{grad} u$ (λ är värmeledningsförmågan).

Vågekvationen: $u_{tt} - c^2 \Delta u = f/\rho$, där f = kraftfördelning, ρ = massdensitet och u = utböjningen. För ljudvågor är u = relativa tryckstörningen $(= (p - p_0)/p_0)$.

Laplaces ekvation $\Delta u = 0$ och Poissons ekvation $\Delta u = f$ kan tolkas som stationär diffusion, stationär värmeledning, stationär svängning, stationär potentialströmning eller elektrostatisk potential.

Randvillkor kan vara av typ **Dirichlet** (u given), **Neumann** ($\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ given) eller blandade.

Homogena randvillkor innebär $u = 0$ eller $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0$ eller $\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0$.

För värmeledning och diffusion gäller

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = -\lambda \operatorname{grad} u \cdot \mathbf{n} = -\lambda \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$$

Ett Neumann-villkor betyder alltså att flödets normalkomponent är given.

I en dimension har de homogena randvillkoren följande tolkningar.

Värmeledning (diffusion)

$u(a, t) = 0$ temperaturen (koncentrationen) i a är 0

$\frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = 0$ inget utflöde i a , isolerad (sluten) ände

$\alpha u(a, t) + \beta \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = 0$ Newtons avsvalningslag gäller i a (omgivningens temp = 0)

Transversella och longitudinella svängningar.

$u(a, t) = 0$ utböjningen i a är 0 fast ände

$\frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = 0$ kraften i a är 0 lös ände

$\alpha u(a, t) + \beta \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = 0$ fjäderkraft verkar i änden

Ljudvågor

$u(a, t) = 0$ tryckstörningen i a är 0 öppen ände

$\frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = 0$ hastigheten i a är 0 sluten ände

Fouriers metod, egenfunktionsutvecklingar.

Värmeledning i en begränsad stav med variabelseparation

Problem: $u_t - a u_{xx} = 0$ i $0 < x < L$, $t > 0$ med **homogena randvillkor** och givna begynnelsevillkor.

Sök först icke-triviala lösningar av typ $u(x, t) = T(t)X(x)$ till $\begin{cases} u_t - a u_{xx} = 0 \\ \text{hom. randvillkor} \end{cases}$

$$\begin{cases} T'X - aTX'' = 0 \\ \text{hom. randvillkor} \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{a} \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda \\ \text{hom. randvillkor} \end{cases} \iff \begin{cases} T' + a\lambda T = 0 \\ -X'' = \lambda X \\ \text{hom. randvillkor} \end{cases}$$

Differentialekvationerna för X resp T kan nu lösas var för sig. Ekvationen för X tillsammans med randvillkoren ger diskreta värden på λ , *egenvärdena* λ_k och tillhörande *egenfunktioner* $X_k(x) = \varphi_k(x)$. Totalt får man $u_k(x, t) = c_k e^{-a\lambda_k t} \varphi_k(x)$.

För homogena *Dirichletvillkor* är $\lambda_k = k^2\pi^2/L^2$ och $\varphi_k(x) = \sin(k\pi x/L)$, $k = 1, 2, \dots$

För homogena *Neumannvillkor* är $\lambda_k = k^2\pi^2/L^2$ och $\varphi_k(x) = \cos(k\pi x/L)$, $k = 0, 1, \dots$

Med **superposition** finner vi fler lösningar $u(x, t) = \sum_k c_k e^{-a\lambda_k t} \varphi_k(x)$. Konstanterna c_k bestäms av begynnelsevillkoren. (Oftast med lämplig Fourierserieutveckling.)

Värmeledning i en begränsad stav med ansatsmetod

Detta är en förkortad variant av föregående och används om man vet vilka egenfunktionerna φ_k är.

Problem: $u_t - au_{xx} = 0$ i $0 < x < L$, $t > 0$ med **homogena Dirichlet- eller Neumannvillkor** och givna begynnelsevillkor. Ansätt då direkt

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin(k\pi x/L) \quad (\text{Dirichlet}) \quad \text{eller} \quad u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \cos(k\pi x/L) \quad (\text{Neumann})$$

Derivera termvis och sätt in i differentialekvationen. Detta leder till differentialekvationerna $u'_k(t) + a\lambda_k u_k(t) = 0$ med lösningarna $u_k(t) = c_k e^{-a\lambda_k t}$. Koefficienterna c_k bestäms av begynnelsevillkoret.

Kommentar: En fördel med denna metod är att den också fungerar för inhomogena differentialekvationer ($u_t - au_{xx} = f(x, t)$). Skillnaden är att man får en inhomogen differentialekvation för $u_k(t)$, se nedan. Samma ansatser fungerar också för den endimensionella vågekvation (odämpad $u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x, t)$ eller dämpad $u_{tt} - au_t - c^2 u_{xx} = f(x, t)$) med homogena Dirichlet- eller Neumannvillkor, och för Laplace/Poissons ekvation ($-\Delta u = f$) på en rektangel med homogena Dirichlet- eller Neumannvillkor i x -led.

Diffusion och värmeledning med homogena randvillkor i operatorform.

Detta är en vidarutveckling av föregående och kan användas på allmännare differentialekvationer med allmännare homogena randvillkor.

Med $\mathcal{A} = -\Delta$ (eller en allmännare differentialoperator av Sturm-Liouvilletyp) och

$D_{\mathcal{A}} = \{u \in C^2(\Omega) \mid \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0\}$ kan värmeledningsproblemet formuleras

$$\begin{cases} u_t + a\mathcal{A}u = f \\ u(x, 0) = g \end{cases}$$

Bestäm först egenfunktioner och egenvärden till \mathcal{A} genom att lösa

$$\begin{cases} \mathcal{A}u = \lambda u, & u \neq 0 \\ u \in D_{\mathcal{A}} \end{cases}$$

(Om problemet är välbekant och man redan vet vilka egenfunktionerna är behöver man naturligtvis inte räkna ut dem.) Ansätt en lösning

$$u(x, t) = \sum_k u_k(t) \varphi_k(x) .$$

Utveckla f och g i egenfunktioner till \mathcal{A} . Här utnyttjas att dessa är en ortogonal bas i L_2 .

$$f(x, t) = \sum_k f_k \varphi_k(x), \quad g(x) = \sum_k g_k \varphi_k(x)$$

Koefficienterna f_k och g_k beräknas med projektnsformeln t ex $f_k = (\varphi_k | f)/(\varphi_k | \varphi_k)$. (I fallet med sinus- eller cosinusserier är detta de vanliga formlerna för beräkning av Fourierkoefficienter.) Derivera u termvis (använd $\mathcal{A}\varphi_k = \lambda_k\varphi_k$), sätt in i värmeledningsekvationen och begynnelsevillkoret. Detta leder till följande differentialekvation för $u_k(t)$

$$u'_k(t) + a\lambda_k u_k(t) = f_k(t), \quad u_k(0) = g_k.$$

Lösningen kan skrivas som summan av en partikulärlösning $u_{k,\text{part}}$ och allmänna homogena lösningen $c_k e^{-a\lambda_k t}$. Konstanterna c_k bestäms av begynnelsevärdet ($u_k(0) = g_k$).

Alternativ om f inte beror på t . Låt u_{stat} vara en stationär (= tidsoberoende) lösning till differentialekvationen och randvillkoren. $v = u - u_{\text{stat}}$ uppfyller då ekvationen $\begin{cases} v'_t + a\mathcal{A}v = 0 \\ v(x, 0) = g - u_{\text{stat}} \end{cases}$.

Denna löses som ovan, med ansatsen $v(x, t) = \sum_k v_k(t)\varphi_k(x)$, och ger en homogen differentialekvation för v_k . Totala lösningen är av formen $u = u_{\text{stat}} + \sum_k c_k e^{-a\lambda_k t}\varphi_k(x)$. Här ses att om alla $\lambda_k > 0$ så $u \rightarrow u_{\text{stat}}, t \rightarrow \infty$ (ungefär som $e^{-a\lambda_1 t}$, där λ_1 är det minsta egenvärdet). I detta alternativet kan man alltså direkt utläsa den asymptotiska (= stationära) lösningen u_{stat} . I lösningen till det förra alternativet kan man se den stationära lösningen i form av en serie.

Vågekvationen med homogena randvillkor, begränsat område

Med $\mathcal{A} = -\Delta$, $D_{\mathcal{A}} = \{u \in C^2(\Omega), \text{ homogena randvillkor} \}$ kan problemet formuleras

$$\begin{cases} u_{tt} + c^2 \mathcal{A}u = 0 \\ u(x, 0) = g(x), \quad u_t(x, 0) = h(x) \end{cases}$$

Problemet löses analogt med värmeledningsekvationen. Starta med att bestämma egenfunktioner till \mathcal{A} . Utveckla i dessa

$$u(x, t) = \sum_k u_k(t)\varphi_k(x), \quad g(x) = \sum_k g_k\varphi_k(x), \quad h(x) = \sum_k h_k\varphi_k(x).$$

Insättning i vågekvationen leder till

$$u''_k(t) + c^2 \lambda_k u_k(t) = 0, \quad u_k(0) = g_k, \quad u'_k(0) = h_k$$

med lösningar av typ

$$u_k(t) = a_k \cos c\sqrt{\lambda_k}t + b_k \sin c\sqrt{\lambda_k}t \text{ om } \lambda_k > 0 \quad \text{och} \quad u_k(t) = a + bt \text{ om } \lambda_k = 0.$$

a_k och b_k bestäms av begynnelsevärdena. Lösningen blir en överlagring av stående vågor med egenvinkelfrekvenserna $\boxed{\omega_k = c\sqrt{\lambda_k}}$. Svängningen är odämpad och 'behåller sin form'.

Inhomogena randvillkor

Starta med att homogenisera randvillkoren genom att sätta $v = u - \tilde{u}$ där \tilde{u} uppfyller randvillkoren. Välj \tilde{u} så enkel som möjligt. Ofta går det bra med en konstant eller ett första- eller andragsgradspolynom.

Dirichlets problem

$\Delta u = f$ i Ω , $u = 0$ på $\partial\Omega$ kan för vissa Ω lösas analogt med variabelseparation och egenfunktionsutveckling. För en rektangel separerar man i variablerna x och y . (Lösningsmetoden är mycket lik motsvarande för den endimensionella vågekvationen på ett begränsat intervall.) För icke-homogena Dirichletvillkor kan det vara bra att dela upp i delproblem och använda superposition (se ex 3.9 i boken).

För $\Omega =$ enhetscirkeln används polära koordinater variabelseparation (ex 3.17 i boken). För detta problem, med $g(\theta) = \delta(\theta)$, går serien att summera och man kommer fram till Poissons formel för enhetscirkeln (kap 5.2.2).

Hilbertrum, operatorer, egenfunktioner

Ett **linjärt rum** H är en mängd med addition och multiplikation med skalärer, som följer de vanliga räknelagarna. Tex \mathbb{R}^n och $C^2(\Omega)$.

$(\mathbf{u} | \mathbf{v})$ är **skalärprodukt** i H om

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} | \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2) &= \lambda_1 (\mathbf{u} | \mathbf{v}_1) + \lambda_2 (\mathbf{u} | \mathbf{v}_2) \\(\mathbf{u} | \mathbf{v}) &= \overline{(\mathbf{v} | \mathbf{u})} \\(\mathbf{u} | \mathbf{u}) &\geq 0 \quad \text{med likhet} \iff \mathbf{u} = 0\end{aligned}$$

Speciellt gäller att $(\mathbf{u} | \lambda \mathbf{v}) = \lambda (\mathbf{u} | \mathbf{v})$ och $(\lambda \mathbf{u} | \mathbf{v}) = \overline{\lambda} (\mathbf{u} | \mathbf{v})$.

Normen av \mathbf{u} är $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(\mathbf{u} | \mathbf{u})}$.

Linjära rum med skalärprodukt kallas **preHilbertrum**. Ett fullständigt preHilbertrum kallas **Hilbertrum**.

Ett viktigt exempel på Hilbertrum är $L_2(w, \Omega)$ med skalärprodukten och normen

$$(u | v) = \int_{\Omega} \overline{u(x)} v(x) w(x) dx \quad \text{resp} \quad \|u\| = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 w(x) dx \right)^{1/2}.$$

Funktionen $w(x) > 0$ kallas viktfunction.

I preHilbertrum gäller

Pythagoras sats: $u \perp v \implies \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

Schwarz olikhet: $|(u | v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ med likhet då och endast då u och v är proportionella.

Triangelolikheten: $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Ortogonalitet: Funktionerna $\{\varphi_k\}_1^\infty$ är parvis ortogonala i pre-Hilbertrummet \mathcal{H} om $(\varphi_k | \varphi_l) = 0$ då $k \neq l$. Om dessutom $\|\varphi_k\|^2 = (\varphi_k | \varphi_k) = 1$ är systemet ortonormerat.

Projektioner Låt $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ vara parvis ortogonala och låt $\mathcal{M} = [\varphi_1, \dots, \varphi_n]$ vara det linjära höljet av $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Projektionen på \mathcal{M} av ett godtyckligt $u \in \mathcal{H}$ definieras av

$$P_{\mathcal{M}} u = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\rho_k} (\varphi_k | u) \varphi_k \quad \text{där} \quad \rho_k = \|\varphi_k\|^2 = (\varphi_k | \varphi_k)$$

Minsta-kvadrat-metoden är en följd av **projektionssatsen** som säger att

$$\inf_{v \in \mathcal{M}} \|u - v\|^2 = \|u - P_{\mathcal{M}} u\|^2,$$

dvs att $P_{\mathcal{M}} u$ är det element i \mathcal{M} som bäst approximerar u om avvikelsen mäts i norm. Med hjälp av Pythagoras sats ses att avvikelsen $\|u - P_{\mathcal{M}} u\|^2 = \|u\|^2 - \|P_{\mathcal{M}} u\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{k=1}^n \frac{|(\varphi_k | u)|^2}{\rho_k}$.

Gram-Schmidts ortogonaliseringsprocess: Ur en linjärt oberoende följd skapas ett ortogonalt system som har samma linjära hölje som den ursprungliga följden.

Om $1, x, x^2, \dots$ ortogonaliseras med skalärprodukten i $L_2(w, \Omega)$ fås olika **ortogonalpolynom**. Med viktsfunktionen $w(x) = 1$ och intervallet $\Omega = [-1, 1]$ fås **Legendrepolynomen** P_n .

Konvergens i norm: $u_n \rightarrow u$ i $\mathcal{H} \iff \|u_n - u\| \rightarrow 0$.

Generaliserade Fourierserier Låt u vara ett element i ett pre-Hilbertrum \mathcal{H} och $\{\varphi_k\}_1^\infty$ parvis ortogonala i \mathcal{H} , då är $c_k = \frac{1}{\rho_k} (\varphi_k | u)$ de generaliserade Fourierkoefficienterna för u och $\sum_1^\infty c_k \varphi_k$ är den generaliserade Fourierserien för u . Det är inte säkert att serien konvergerar mot u .

Om varje $u \in \mathcal{H}$ kan skrivas $u = \sum_1^\infty c_k u_k$ (konvergens i norm), så säger man att $\{\varphi_k\}_1^\infty$ är en **ortogonal bas** för \mathcal{H} .

Exempel:

$\{e^{ik\pi x}\}_{-\infty}^{\infty}$	är en ortogonal bas i $L_2([-1, 1])$
$\{\sin k\pi x\}_1^{\infty}$	är en ortogonal bas i $L_2([0, 1])$
$\{\cos k\pi x\}_0^{\infty}$	är en ortogonal bas i $L_2([0, 1])$
Legendrepolyomen $\{P_k(x)\}_0^{\infty}$	är en ortogonal bas i $L_2([-1, 1])$
$\{\sin k\pi x \sin j\pi y\}_{j,k=1}^{\infty}$	är en ortogonal bas i $L_2(\Omega)$, $\Omega : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$
$\begin{cases} J_n(\alpha_{n,k}r) \cos n\theta, & J_n(\alpha_{n,k}) \sin n\theta \\ J_0(\alpha_{0,k}r), & n, k = 1, 2, \dots \end{cases}$	är en ortogonal bas i $L_2(r, \Omega)$, $\Omega : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi$

Parsvals formel: Om $\{\varphi_k\}_1^{\infty}$ är en **ortogonal bas** för \mathcal{H} och $u = \sum_1^{\infty} c_k \varphi_k$ så är $\|u\|^2 = \sum_k |c_k|^2 \|\varphi_k\|^2$.

En **operator** \mathcal{A} har **egenfunktionen** φ med **egenvärdet** λ om $\mathcal{A}\varphi = \lambda\varphi$, $\varphi \neq 0$ och $\varphi \in D_{\mathcal{A}}$.
En operator \mathcal{A} är **symmetrisk** om $(\mathcal{A}u | v) = (u | \mathcal{A}v)$ för alla $u, v \in D_{\mathcal{A}}$.

En symmetrisk operator har **reella egenvärden** och egenfunktioner hörande till *olika* egenvärden är **ortogonala**.

\mathcal{A} är **positivt semidefinit** om $(\mathcal{A}u | u) \geq 0$ för alla $u \in D_{\mathcal{A}}$, då är alla egenvärden ≥ 0 .

Sturm-Liouvilleoperatorerna $\mathcal{A}u = \frac{1}{w}(-(pu')' + qu)$ ($w, p > 0, q \geq 0$) med homogena randvillkor, av typ $\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ ($\alpha, \beta \geq 0$, ej båda $= 0$) på randen $\partial\Omega$, är symmetriska och positivt semidefinita. Dess egenfunktioner bildar en ortogonal bas i $L_2(w, \Omega)$. (Observera viktfunktionen.)

För att finna en ortogonal bas av egenfunktioner till en operator i *flera variabler* kan man göra en *variabelseparation* och ett täthetsresonemang som visar att varje $u \in L_2(w, \Omega)$ kan approximeras godtyckligt bra med linjärkombinationer av de separerade egenfunktionerna. (Se ex H.27, S.4 och S.6 (Ex 28 i kap H, Ex 3 och Ex 6 i kap S i gamla kompendiet)). Härvid uppkommer några endimensionella differentialekvationer som man måste behärska.

Variabelseparation i $-\Delta u = \lambda u$ i polära koordinater (2 dimensioner)

Separationen $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ i $-\Delta u = \lambda u$ ger upphov till (Se ex S4):

Θ -ekvationen: $\Theta'' + c\Theta = 0$.

Har man 2π -periodiska randvillkor ($\Theta(\pi) = \Theta(-\pi)$, $\Theta'(\pi) = \Theta'(-\pi)$) finns icke triviala lösningar om och endast om $c = n^2$ där $n = 0, 1, 2, \dots$. Dessa är $\{\cos n\theta, \sin n\theta\}_0^{\infty}$ eller $\{e^{in\theta}\}_{-\infty}^{\infty}$. I detta fall är egenvärdena dubbla om $n \neq 0$. (Se ex H.25.)

R -ekvationen:

$$R'' + \frac{1}{r}R' + (\lambda - \frac{\nu^2}{r^2})R = 0 \iff R(r) = \begin{cases} aJ_{\nu}(r\sqrt{\lambda}) + bY_{\nu}(r\sqrt{\lambda}) & \text{om } \lambda > 0 \\ ar^{\nu} + br^{-\nu} & \text{om } \lambda = 0, \nu \neq 0 \\ a \ln r + b & \text{om } \nu = \lambda = 0. \end{cases}$$

I Sturm-Liouvilleform kan R -ekvationen skrivas $\frac{1}{r}(-(rR')' + \frac{\nu^2}{r}R) = \lambda R$ (obs $w = r$).

(För $\lambda \neq 0$ finns lösningen på formelbladet. För $\lambda = 0$ är diffekvationen Eulerhomogen och kan i de flesta fall lösas med ansatsen $R = r^p$. Fallet $\lambda = \nu = 0$ behandlas speciellt, se lemma S.1)

Variabelseparation i $-\Delta u = \lambda u$ i sfäriska koordinater (3 dimensioner)

Separationen $u(r, s, \phi) = R(r)S(s)\Phi(\phi)$, där $s = \cos \theta$ i $-\Delta u = \lambda u$ ger upphov till (se ex S.6):

Φ -ekvationen: $\Phi'' + d\Phi = 0$.

S -ekvationen:

$$((1-s^2)S')' + (\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-s^2})S = 0 \iff$$

$$S(s) = aP_{\ell}^m(s) + bQ_{\ell}^m(s), \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, m = 0 \dots \ell$$

Se formelbladet. (I kvantmekaniken, där man använder exponentiell framställning av ϕ -funktionerna används $m = -\ell \dots \ell$.)

R -ekvationen:

$$R'' + \frac{2}{r}R' + \left(\lambda - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right)R = 0 \iff$$

$$R(r) = \begin{cases} ar^\ell + br^{-\ell-1} & \text{om } \lambda = 0, \ell = 0, 1, 2, \dots \\ aj_\ell(r\sqrt{\lambda}) + by_\ell(r\sqrt{\lambda}) & \text{om } \lambda > 0, \ell = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

I Sturm-Liouvilleform kan R -ekvationen skrivas $\frac{1}{r^2}(-(r^2R')' + \ell(\ell+1)R) = \lambda R$ (obs $w = r^2$). (För $\lambda \neq 0$ finns lösningen på formelbladet. För $\lambda = 0$ är differentialekvationen Eulerhomogen, pröva anatsen $R = r^p$. I fallet $\ell = 0$ kan ekvationen lösas med elementära metoder, se ex S.5.)

Integraltransformer, integralformler, Greenfunktioner

Värmeledning, diffusion på \mathbb{R} .

Kan lösas med Fouriertransform (eller Laplacetransform) i x -led.

För problemet

$$\begin{cases} u_t - au_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

kan lösningen direkt skrivas med formeln

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \alpha, t)g(\alpha) d\alpha = G * g(x, t)$$

där $G(x, t) = e^{-x^2/4at}/\sqrt{4\pi at}$ (se formelblad) är **Greenfunktionen** för värmeledning.

Lösningarna innehåller ofta $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy$ (spec är $\text{erf}(\infty) = 1$), se formelblad. Alltså är $\text{erf}(x)$ en primitiv funktion till $\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ och således är $\int_a^b e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}(\text{erf}(b) - \text{erf}(a))$.

Halvoändliga områden

Problem på *halvoändliga områden* ($x \geq 0$) kan utvidgas till hela \mathbb{R} med hjälp av speglingar. Gör en udda spegling om $u(0, t)$ är given (Dirichletvillkor) och jämn spegling om $u_x(0, t)$ är given (Neumannvillkor). För beräkning av derivator med avseende på x används (se avsnitt D.11 i boken) $(u^-)_{xx} = (u_{xx})^- + 2u(0, t)\delta'$ respektive $(u^+)_{xx} = (u_{xx})^+ + 2u_x(0, t)\delta$. Dessa regler blir speciellt enkla om randvillkoren vid $x = 0$ är homogena ($u(0, t) = 0$ resp $u_x(0, t) = 0$). För icke-homogena randvillkor är det därför ofta bra att först homogenisera.

För problem på *ändliga intervall* ($0 \leq x \leq L$) använder man vanligen egenfunktionsutvecklingar, men vissa problem kan också lösas med upprepade speglingar.

Vågekvationen

Den homogena endimensionella vågekvationen $u_{tt} - c^2u_{xx} = 0$ har alltid den allmänna lösningen $u(x, t) = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct)$. Svårigheten är att hitta lösningar som uppfyller givna begynnelse- och randvillkor.

Vågekvationen på \mathbb{R} kan lösas med Laplace- eller Fouriertransformation i x -led.

Till problemet

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) \\ u'_t(x, 0) = h(x) \end{cases}$$

kan lösningen direkt skrivas med **d'Alemberts** formel (se formelblad).

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(g(x - ct) + g(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y) dy .$$

Problem på *halvoändliga områden* ($x \geq 0$), t ex svängande halvoändlig sträng, kan utvidgas till hela \mathbb{R} med hjälp av speglingar. Udda spegling om $u(0, t) = 0$ (fast inspänd ände) och jämn spegling om $u_x(0, t) = 0$ (lös ände).

Lösningarna kan också (i enkla fall) konstrueras med geometriska resonemang, fortskridande vågor, reflektion i ändpunkter (speglingar).

För problem på *ändliga intervall* ($0 \leq x \leq L$) använder man vanligen egenfunktionsutvecklingar, men man kan också använda med upprepade speglingar.

Poissons/Laplaces ekvation $-\Delta u = f$

Problem i ett halvplan ($x \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$) kan lösas med Fourier(Laplace)transform i x -led.

För Dirichlets problem i ett halvplan (med $f = 0$):

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x \in \mathbb{R}, y > 0 \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

kan lösningen direkt skrivas med **Poissons integralformel**,

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x - \alpha, y) g(\alpha) d\alpha = P * g(x, y) ,$$

där $P(x, y) = y/(\pi(x^2 + y^2))$ är *Poissonkärnan* för halvplan (se formelblad).

För motsvarande problem i enhetscirkeln ($\Omega : x^2 + y^2 < 1$) är lösningen

$$u(r, \theta) = \int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta - \alpha) g(\alpha) d\alpha = P * g(r, \theta)$$

där $P(r, \theta) = (1 - r^2)/(2\pi(1 + r^2 - 2r \cos \theta))$ är *Poissonkärnan* för enhetscirkeln (se formelblad).

Liknande problem i kvartsplan eller halvcirkel ($x > 0$) kan utvidgas till halvplan respektive cirkel med hjälp av spegling (av g och u), udda om $u(0, y)$ är given och jämn om $u_x(0, y)$ är given.

För det allmännare problemet (Dirichlets problem för Laplaceoperatorn på Ω),

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{i } \Omega \\ u = g & \text{på } \partial\Omega \end{cases}$$

kan lösningen skrivas (se formelblad) med hjälp av **Greenfunktionen** $G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha})$ för Dirichlets problem på Ω (definition se formelblad)

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}) f(\boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{\alpha} - \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_{\boldsymbol{\alpha}}}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}) g(\boldsymbol{\alpha}) dS_{\boldsymbol{\alpha}} .$$

Svårigheten är att bestämma Greenfunktionen $G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha})$

Beräkning av Greenfunktionen $G(x, a)$ för några enkla områden Ω .

1. För $\Omega = \mathbb{R}^n$ är Greenfunktionen $G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}) = K(\mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha})$, där $K(\mathbf{x})$ är **fundamentallösning** till Laplaceoperatorn ($-\Delta K = \delta$). För $\Omega = \mathbb{R}^2$ eller \mathbb{R}^3 finns fundamentallösningarna på formelbladet.
2. För $\Omega =$ halvplan eller halvrum spegla udda och använd punkt 1. Greenfunktionen är $G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}) = K(\mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}) - K(\mathbf{x} - \tilde{\boldsymbol{\alpha}})$, där $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$ är spegelpunkt till $\boldsymbol{\alpha}$.

För kvartsplan spegla först i ena axeln sen i den andra (totalt 4 punkter).

3. Om Ω är cirkelskivan eller klotet $|\mathbf{x}| < \rho$ spegla udda i cirkeln och använd fundamental-lösningar. Greenfunktionen är $G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\alpha}) = K(\mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}) - K(C(\mathbf{x} - \tilde{\boldsymbol{\alpha}}))$, där $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$ är konjugerad punkt (se boken kap 5.5) till $\boldsymbol{\alpha}$ och konstanten $C = |\boldsymbol{\alpha}|/\rho$ är vald så att $G = 0$ på randen $\partial\Omega$.

Kommentarer: För begränsade områden kan Greenfunktioner bestämmas med egenfunktionsutvecklingar.

För halvplan/halvrum med homogena Neumannvillkor kan man använda jämna speglingar.