TEKNISKA HÖGSKOLAN I LUND
MATEMATISKA INSTITUTIONEN

TENTAMENSSKRIVNING
KONTINUERLIGA SYSTEM
1999-06-05 kl 8–13

HJÄLPMEDEL: *Utdelade formelblad (Kontinuerliga system + Komplex analys för F), Tefyma eller gymnasietabell, räknedosa.*
Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. En halvoändlig sträng ($x \geq 0$) är fri i ändpunkten ($x = 0$). (Änden kan tänkas vara fäst i en viktlös ring som löper friktionsfritt längs en stav, vinkelrät mot strängens jämviktsläge.) Vid tiden $t = 0$ befinner sig strängen i vila och dess utböjning beskrivs av funktionen

$$g(x) = \begin{cases} x - 1\ , & 1 < x < 2 \\ 3 - x\ , & 2 < x < 3 \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$$

Strängen släpps utan yttre påverkan vid $t = 0$. Rita strängens utböjning vid de tidpunkter då $ct = 1/2$, $ct = 1$, $ct = 3/2$, $ct = 2$, $ct = 5/2$ och $ct = 3$ och beskriv vad som händer sedan. (c är vågutbredningshastigheten i strängen.)

2. Bestäm två polynom p_0 och p_1 av grad 0 respektive 1 som är ortogonala i $L_2([0,1])$. Bestäm också det förstagradspolynom $p(x)$ som minimerar

$$\int_0^1 (x^4 - p(x))^2\, dx\ .$$

Vad är det minimala värdet av integralen?

3. En tunn stav med längden 1 är isolerad överallt utom i ändpunkterna och i mittpunkten. Ändpunkterna hålls vid temperaturen 0°. I mittpunkten finns en 'punktformad' värmekälla (svetslåga), vilken avger konstant värmemängd per tidsenhet. Vid startögonblicket ($t = 0$) har hela staven temperaturen 0°. Formulera en matematisk modell för temperaturfördelningen $u(x,t)$ i staven och lös problemet. Bortse från eventuellt värmeläckage vid mittpunkten. Alla fysikaliska konstanter får sättas till 1.

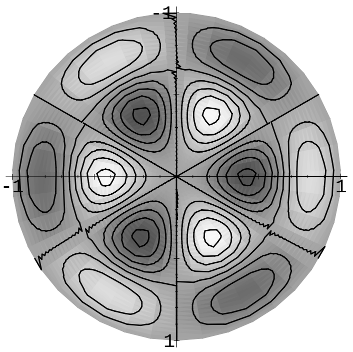
4. Lös värmeledningsproblemet

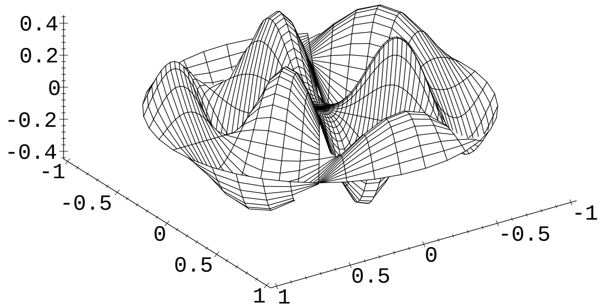
$$\begin{cases} u_t - a u_{xx} = 0\ , & x > 0\ ,\ t > 0 \\ u(0,t) = 1\ , & t > 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} 1 - x\ , & 0 < x < 1 \\ 1\ , & x \geq 1 \end{cases} \end{cases}$$

Lösningen skall uttryckas med hjälp av funktionen 'erf'.

Var god vänd

5. a) Figurerna nedan framställer en egenfunktion till en välkänd operator $\mathcal{A}$. Den vänstra visar funktionens nivåkurvor.





Vilken är operatorn $\mathcal{A}$, ange även definitionsmängden $D_{\mathcal{A}}$. Vad är det tillhörande egenvärdet?

b) Till vilket problem är funktionen

$$P(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta}$$

lösning? Funktionen $P(r,\theta)$ kan användas för att skriva lösningen till ett allmännare problem. Ange detta samt en formel för lösningen.

6. Låt Ω vara området mellan två sfärer med medelpunkt origo och radierna 1 respektive 2. Lös potentialproblemet

$$\begin{cases} \Delta u = 0\ , & \text{i } \Omega \\ u = \cos\theta\ , & r = 1\ ,\ 0 < \theta < \pi\ ,\ 0 < \phi < 2\pi \\ u = \cos^3\theta\ , & r = 2\ ,\ 0 < \theta < \pi\ ,\ 0 < \phi < 2\pi \end{cases}$$

((r,θ,ϕ) är formelbladets sfäriska koordinater.)

LYCKA TILL!