LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATISKA INSTITUTIONEN

TENTAMENSSKRIVNING
KONTINUERLIGA SYSTEM 5p
1998-08-24 kl 8-13

HJÄLPMEDEL: *Utdelade formelblad (Kontinuerliga system + Komplex analys för F), Tefyma eller gymnasietabell, räknedosa.*
Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Lös värmeledningsproblemet

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < 2, t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = \theta(x-1), & 0 < x < 2 \end{cases}$$

2. En halvoändlig sträng ($x \geq 0$) med vågutbredningshastigheten c är fast inspänd i ändpunkten ($x = 0$). Strängen befinner sig i vila och ges vid tiden $t = 0$ begynnelsehastigheten $\theta(x-1) - \theta(x-2)$ medelst ett hammarslag.

a) Rita strängens utböjning vid den tidpunkt då $ct = 2$.

b) Avgör för vilka tidpunkter utböjningen är 0 i punkten $x = 3$.

3. Operatorn $\mathcal{A}$ definieras av

$$\mathcal{A}u = -\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}(\sqrt{1-x^2}\frac{du}{dx})$$
$$D_{\mathcal{A}} = C^2([-1,1]).$$

a) Ange en skalärprodukt i vilken $\mathcal{A}$ är självadjungerad (symmetrisk).

b) Visa utgående från definitionen att $\mathcal{A}$ är självadjungerad i skalärprodukten i a)

c) Visa att funktionerna $1, x, 2x^2-1$ är egenfunktioner till $\mathcal{A}$ och bestäm motsvarande egenvärden.

4. a) Lös problemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\alpha u, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = \delta(x) & \\ u(x,t) \quad \text{begränsad} & \end{cases}$$

där $\alpha > 0$.

b) Ange en rimlig fysikalisk tolkning av problemet i a).

Var god vänd!

5. a) Bestäm Greenfunktionen för Dirichlets problem för första kvadranten ($x > 0, y > 0$).

b) Lös problemet

$$\begin{cases} -\Delta u = \delta_{(1,1)}(x,y), & x > 0, y > 0 \\ u(x,0) = 0, & x > 0 \\ u(0,y) = \delta_1(y), & y > 0 \end{cases}$$

6. Ett fullständigt elastiskt, fast inspänt membran har formen av en cirkelsektor med radie ρ och medelpunktsvinkel v. Beräkna egenvinkelfrekvenser och svängningsmoder för membranet.

SLUT!