

HJÄLPMEDEL: Utdelade formelblad (Kontinuerliga system + Komplex analys för F), Tefyma eller gymnasietabell, räknedosa.

Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar.

1. Ge en rimlig fysikalisk tolkning av problemet

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x > 0, t > 0 \\ u(0, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & x > 0 \\ u_t(x, 0) = \delta(x-1), & x > 0 \end{cases}$$

och lös problemet. Skissera lösningen som funktion av x då $ct = 1/2$, $ct = 1$, $ct = 2$, $ct = 3$ och beskriv vad som händer sedan.

2. Operatoren \mathcal{A} beskrivs av

$$\mathcal{A}u = -\frac{d^2u}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{du}{dr} = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right)$$
$$D_{\mathcal{A}} = \{u \in C^2([0, 1]) \mid u(1) = 0\}.$$

- Ange en skalärprodukt i vilken \mathcal{A} är symmetrisk (självadjungerad).
 - Visa utgående från definitionen att \mathcal{A} är symmetrisk och positivt semidefinit i den i a) angivna skalärprodukten.
 - Bestäm egenvärden och egenfunktioner till \mathcal{A} .
 - Ge exempel på ett fysikaliskt problem som kan lösas med hjälp av dessa egenfunktioner.
3. Ett smalt rör av längd L har slutna ändar. Vid tiden $t = 0$ injiceras massan M av ett radioaktivt ämne i rörets mittpunkt. Ämnet diffunderar därefter ut i röret och sönderfaller med en hastighet som är proportionell mot koncentrationen. Formulera en modell för ämnets koncentration i röret samt lös problemet.
4. Bestäm den begränsade lösningen till värmeledningsproblemet

$$\begin{cases} u_t - au_{xx} = 0, & x > 0, t > 0 \\ u(0, t) = T_0, & t > 0 \\ u(x, 0) = T_1, & x > 0. \end{cases}$$

Ge en fysikalisk tolkning av problemet och kontrollera genom att undersöka gränsvärden att svaret är rimligt.

Var god vänd!

5. a) Avgör om följande mängder av funktioner är linjära rum

$$M_1 = \{f \in C^1([0, 1]) \mid f(0) = f(1)\}$$

$$M_2 = \{f \in C^1([0, 1]) \mid f^2(0) = f^2(1)\} .$$

- b) Låt $G(x; \alpha)$ vara Greenfunktionen för Dirichlets problem i ett område Ω . Skriv upp det problem som $G(x; \alpha)$ löser. Vad menas med Greenfunktionens reciprocitet? Svara med formel och ord.

6. a) Ett homogent klot har radien 1. Den övre halvan av klotets begränsningsyta hålls vid temperaturen 100° och den undre halvan vid temperaturen 0° . Ställ upp en modell och beräkna den stationära temperaturfördelningen i klotet. Svaret får innehålla integraler.
- b) Beskriv kortfattat en annan metod (än den du valt i a)) att lösa problemet i a).

LYCKA TILL!