Lunds universitet
Matematikcentrum/avd LTH
Gerd Brandell

9 november 2005

Synpunkter på förslaget till kursplaner i matematik 1-5, GY 2007, enligt utkast daterat 2005-10-21

Jag har tagit del av kursplaneutkast för Matematik, daterat 2005-10-21. Nedan följer mina synpunkter på och kritik av förslaget. Som bilaga medföljer ett kortfattat förslag till alternativ struktur och innehåll i de fem kurserna.

Utgångspunkter

Alla förändringar som nu föreslås måste kunna motiveras väl och man bör noga väga olika tänkbara förändringar mot varandra för att sammantaget uppnå förbättringar. Det föreliggande förslaget åtföljs inte av några motiveringar av konkreta ändringsförslag vilket är en stor brist. En diskussion av utgångspunkter och värderingar är svår att föra eftersom dessa inte redovisas i förslaget.

Utgångspunkten *borde* vara att vi skapar ett system där fler elever får möjlighet att klara kurserna, fler elever får djupare och bättre kunskaper, alla elever får möjlighet att anknyta ämnet till andra ämnen och fler elever blir intresserade att läsa vidare.

Följande principer är absolut grundläggande att ta hänsyn till i ett nytt förslag:

- *Öka inte innehållet, minska i vissa kurser*
  Idag råder stoffträngsel i flera kurser och det saknas utrymme för att träna matematiska förmågor som problemlösningsförmåga, resonemangsförmåga, begreppskunskap, procedurförmåga osv. Ett utökat innehåll skulle försämra situationen.
- *Nytt innehåll kräver minskning av annat innehåll*
  En konsekvens av förra punkten.
- *Modernisera kursinnehållet*
  Den modernisering som skedde i den förra reformen bland annat genom betoningen på statistik och sannolikhetslära och införandet av diskret matematik bör fortsättas. Geometrin bör ges en starkare ställning. Analysens ställning måste därmed revideras. Förändringar måste utgå från användning av matematiken i dagens samhälle och ämnets utveckling.
- *Minska plottrigheten i innehållet*
  För att ge större möjligheter till begreppsutveckling i ett meningsfullt sammanhang måste kursinnehållet samlas mer än i dagens kurser.
- *Inför inte för svåra moment*
  Matematiken är ett ämne som måste avpassas noga när det gäller svårighetsgraden. Man måste ta hänsyn till att många elever kämpar med ämnet, speciellt i de första kurserna. Även i mer avancerade kurser är det väsentligt att eleverna får möta begrepp som de har rimlig möjlighet att ta till sig och kunna förstå.
- *Ta hänsyn till programinriktningen*
  Sedan reformen 1994 och revideringen 2000 har läroboksförfattare och lärare arbetat med att anpassa kurserna till de olika programmen. Läroböcker finns numera i olika versioner för olika program. Den utveckling som därmed pågår bör stödjas av de nya kursplanerna. Det kan man uppnå genom att ge utrymme för programanknuten modellering/tillämpning.
- *Genomför endast en marginell förändring av kärnämneskursen*
  Lärare och läroboksförfattare har arbetat för att finna lösningar och kunna ge kärnämneskursen en rimlig utformning för alla program. Fortfarande finns stora svårigheter för många elever att nå målen och få godkänt på denna kurs. Många lärare arbetar med specialinriktningar med programinriktade tillämpningar (s k ”infärgning”). Kursens mål och innehåll bör inte ändras i rikting mot ökade krav eller utökat innehåll. Det skulle ofelbart leda till fler misslyckanden med kursen och nya svårigheter för lärare och elever.

Det föreliggande förslaget bryter mot samtliga dessa principer, i varierande grad men tillräckligt för att göra förslaget omöjligt att genomföra. Det saknas en genomtänkt vision för helheten. Ett genomförande av förslaget skulle komma att leda till väsentligt försämrade reslutat både kunskapsmässigt och attitydmässigt för stora grupper av elever.

Inledningen

I den inledande texten om ämnet Matematik på gymnasieskolan finns en kort beskrivning av matematikens användning och betydelse.

> ”Matematiken är sedan länge ett av naturvetenskapens främsta verktyg, men ämnet får också en snabbt växande betydelse bland annat för kommunikation i vid mening och för hur vi organiserar samhället vad gäller t ex bankväsende, transportsystem, stadsplanering och handel. Även vår bildmässiga värld blir alltmer beroende av matematiska modeller, t ex vid animationer, simuleringar och konstruktion av virtuella miljöer. Matematiska modeller är således viktiga redskap för förståelse och hantering av problemsituationer och för kommunikation inom de flesta områden och verksamheter.”

Här saknas en referens till användningen av matematik inom ekonomi och samhällsvetenskap i allmänhet, i de flesta yrken och professionella verksamheter. Stycket omges av avsnitt som behandlar skolämnet Matematik och betydelsen av kunskaper i matematik. Hela kursplanen borde istället inledas med en beskrivning av ämnet, dess roll i samhället idag och betydelsen av matematikkunskaper i olika avseenden (medborgarkunskaper som är viktiga för alla, kunskaper i yrkesliv och utbildning). Det vore naturligt att ämnesbeskrivningen ovan utvecklades och placeras i en inledning. Utifrån detta kan sedan målen för Matematiken på gymnasiet utvecklas.

Mål för ämnet

De nuvarande ”Mål att sträva mot” har ersatts med ”Mål för ämnet” och de har blivit färre. En koncentration till färre mål är rimlig, gör kursplanen lättare att överblicka och medger en tydlig koppling till betygskriterierna. Men det är samtidigt viktigt att inte förlora väsentliga mål.

De affektiva målen finns inte längre med, vilket är en brist. Självtillit och positiva attityder till ämnet stärker förmågan att lära sig matematik och bör därför ingå i målen för gymnasiematematiken.

Punkten om kommunikation innefattar även argumentation och anses därmed täcka även den logiska förmågan. Om dessa två aspekter (kommunikation och logiska resonemang) slås samman i en förmåga måste det skrivas tydligare att här ingår att det handlar om att kunna resonera logiskt. Ett alternativ är att införa en ny förmåga: förmågan att resonera logiskt och övertygande.

Punkten om problemlösning och modellering bör delas upp i två punkter för att skapa större klarhet och ge konsistens med betygskriterierna. All matematisk problemlösning innefattar inte modellering. Modellering innebär inte alltid problemlösning. Modellering innebär att man arbetar med tillämpningar och modellering är därmed den väsentligaste punkten i målen för programanknytning (”infärgning”). Det motiverar att modellering får en egen punkt både i målen och i betygskriterierna.

Modelleringsmålet skulle även kunna påverka innehållet genom att programanknuten modellering blir en innehållspunkt i varje kurs. Därmed kan exempelvis de trigonometriska grundsambanden införas på NV-programmet som en del av den programanknutna tillämpningen av geometrin, speciellt likformigheten, i kärnämneskursen. Likaså kan man på hela SP-programmet eller ekonomiinriktningen införa beräkningar av lönekostnader, skatter, annuiteter osv som tillämpningar på procentbegreppet och ”ränta på ränta” som ingår i Matematik 1 och 2. På yrkesprogram kan man införa tillämpningar som rör respektive yrkesområde, som utveckling av exempelvis geometri, proportionalitet, tidmätning, olika former av överslagsberäkningar. Allt detta görs redan idag, men kan få tydligare stöd i kursplanen.

Procedurförmågan bör innefatta att eleverna ska kunna vissa formler utantill. Idag lär sig många elever överhuvudtaget ingen formel, eftersom det finns formelsamlingar att tillgå i alla situationer. Detta skapar en enorm osäkerhet och begreppsförvirring hos vissa elever. Det handlar om enkla formler som man använder hundratals gånger, som potenslagar, trigonometriska ettan osv.

Bedömning och betygssättning

Enligt vad som sägs ovan bör punkten *Problemhantering* delas upp i två punkter, en som handlar om problemlösning och en om modellering. Punkten *Kommunikationsförmåga* måste tydligare innehålla förmågan att resonera logiskt alternativt dela upp i två punkter.

Innehållet

De största bristerna i innehållsförslaget är att

- förslaget är tillbakablickande och konservativt och bryter den moderniseringsprocess som pågått sedan 1994
- det mesta av den diskreta matematik som införts försvinner i det aktuella förslaget
- kurserna är plottriga och osammanhängande
- det saknas utrymme för att utveckla de fem förmågorna genom överlastat innehåll
- det saknas ett större självständigt arbete – också det en tillbakagång

Kursplanens punkter innehåller med få undantag endast substantiv med bestämningar, vilket lämnar osäkerhet ifråga om vad eleverna ska lära sig. Till exempel står om räta linjen i nuvarande kurs B:

> ”Eleven skall kunna arbeta med räta linjens ekvation i olika former samt lösa linjära olikheter och ekvationssystem med grafiska och algebraiska metoder”

medan i förslaget för kurs Matematik 2 står:

> ”De fem matematiska förmågorna skall utvecklas med hjälp av följande centrala innehåll: räta linjens ekvation samt linjära ekvationssystem och linjära olikheter (en av flera punkter)”

För att lärare och elever ska kunna tolka detta behöver man veta vilka förmågor som kommer in just för denna punkt i innehållet. Ifråga om den räta linjen bör det handla om samtliga förmågor. I andra fall måste man ställa mindre krav, till exempel i samma kurs ”… potenser med rationella exponenter…” som är ett avancerat begrepp på denna nivå och där man kan nöja sig med viss procedurförmåga i kursen Matematik 2. *Innehållet* borde alltså på något sätt närmare *knytas till de olika förmågorna*,

I varje kurs – inte bara i kärnämneskursen – bör en innehållslig punkt läggas till som avser *modellering och tillämpning* inom programmets och inriktningens ämnen.

Varje kurs bör uttryckligen innehålla en punkt om typer av program (symbolhanterande, dynamiska geometriprogram osv) eller metoder för att med *miniräknare och dator* lösa problem eller genomföra beräkningar.

De föreslagna innehållen i matematikhistoria är för snävt definierade. Lärare och elever bör kunna välja mer fritt inom ett bredare område av matematikhistorien. Inslaget av matematikhistoria bör prägla alla kurserna i enlighet med målen (en av förmågorna) men inte definieras som egna moment. Risken är annars att det historiska inslaget inte integreras väl. Målet är att eleverna ska förstå att matematiken utvecklas och är en levande vetenskap och att det mesta av den matematik de lär sig på gymnasiet har djupa rötter i historien.

Matematik 1

I Matematik 1 bör ingå som viktigt innehåll *procentbegreppet* och *tidmätning*, eftersom dessa begrepp är dåligt förstådda från grundskolan av många elever och mycket centrala både för medborgarkunskap och i programanknuten tillämpning.[1]

Proportionalitet och linjära samband bör som idag ingå i Matematik 1. Funktionsbegreppet bör ingå i en enkel form, liksom idag. Exponentiell tillväxt i diskret tid (ränta på ränta) bör också ingå liksom idag. Punkten om tillämpningar i privatekonomi förutsätter att ränteberäkningar i flera steg ingår.

Punkten om statistik bör som i förslaget innehålla olika lägesmått (t ex median, typvärde och medelvärde) men däremot räcker det med ett spridningsmått, nämligen kvartiler. Standaravvikelse ska inte ingå i Matematik 1 eftersom det är ett tekniskt komplicerat mått.

Punkten om statistik bör uttryckligen innefatta datapresentation med hjälp av EDA (Exploratory Data Analysis, exempel: ”boxplots”), som finns att tillgå i vanliga program som Excel.

[1] Betydelsen av goda kunskaper om tidmätning motiveras bland annat av att kunskaper behövs för alla som har regelrad men oregelbunden arbetstid med olika former av övertidsersättning och ersättning för obekväm arbetstid. Tiden mäts ofta i delar av timmar (ofta tiondelar). Arbetstidsavtal med sådan tidmätning är vanlig inom många yrken och kunskaper därmed väsentliga för att man ska kunna kontrollera sitt lönebesked.

Punkten om sannolikhet, kombinatorik och upprepade försök bör flyttas till Matematik 2. I inledningen har jag argumenterat för att kärnämneskursen inte ska utökas innehållsmässigt och inte göras svårare. Sannolikhet är ett tämligen svårt begrepp, vilket är visat ibland annat svensk aktuell forskning.

Punkten om trigonometri bör absolut inte införas i Matematik 1, av samma skäl som ovan.

Punkten om geometri kan hellre behållas enligt nuvarande Matematik A. Geometriska satser bör ingå – inte bara begrepp och tillämpningar.

Den historiska punkten är olämpligt vald: ”talsystemets utvidgning från naturliga tal till reella tal ur ett historiskt perspektiv”. För att förstå utvidgningen till *reella tal* bör man ha god förståelse båda av negativa tal och irrationella tal, vilket få av dessa elever kan ha. Det är lämpligare att låta historieinslaget handla om talsystem och aritmetik i olika kulturer och olika sätt att representera tal.

Matematik 2

Denna kurs läses av alla elever på NV, TE och SP. Den kommer troligen att vara krav i behörigheten för vårdutbildningar, till exempel sjuksköterskeutbildningen, och därmed kommer kursen att läsas av många elever på omvårdnadsprogrammet.

En punkt om sannolikhet för upprepade slumpmässiga försök, sannolikheter i ändliga utfallsrum, relativa frekvenser och enkel kombinatorik införs, (flyttad från Matematik 1).

Punkten om enkla potensekvationer bör innefatta enkla andragradsekvationer och det kan eventuellt skrivas ut för tydlighetens skull.

Punkten om normalfördelade material och beräkning av sannolikheter bör utgå. Sannolikhet i det kontinuerliga fallet förutsätter att man förstår integraler och sannolikhetsfördelningar, vilket inte är möjligt på detta stadium. Normalfördelningens största betydelse ligger i centrala gränsvärdessatsen, som knappast är relevant på gymnasiet. En punkt om sannolikhetsfördelningar bör föras in i en högre kurs, enligt mitt förslag i Matematik 5. Där kan man behandla andra fördelningar av stor betydelse som exponentialfördelningen (tiden fram till att sammansatta system slutar fungera) och Poissonfördelningen (köbildning).

Punkten om samband mellan två variabler bör formuleras om enligt: ”…skillnaden mellan samvariation och orsakssamband” i stället för ”…skillanden mellan korrelation och orsakssamband..”. Korrelation mäter endast det linjära sambandet (linjär regression) – två variabler kan ha korreltionen=noll men ändå samvariera.

Geometrin bör samlas i dels Matematik 1 och dels en av de högre kurserna där man kan behandla den mer grundligt. Matematik 2 är av stor betydelse för SP-programmet och det finns andra områden som är mer väsentliga och intressanta för blivande samhällsvetare än just geometri.

Den *projektiva geometrin* bör definitivt inte införas i denna kurs. Området har fått förnyad aktualitet inom bildbehandlingen, men är än så länge ovanligt även i grundläggande högskoleutbildning. Projektiv geometri ingår inte i de kurser som nuvarande gymnasielärare har studerat. Detta är ett moment som aldrig ingått i gymnasiekursen För att göra den meningsfull krävs enligt lärare som arbetat med området på gymnasienivå minst 15 timmar, vilket inte är möjligt i Matematik 2. En möjlighet att införa projektiv geometri är som ämne för specialarbeten eller projekt eller i lokala fördjupningskurser.

Punkten om matematisk argumentation bör flyttas till en högre kurs där den kan uppskattas av elever med större matematisk mognad. Intresset för bevisföring och ekvivalensrelationer är troligen mycket begränsat bland eleverna på SP och yrkesprogrammen.

Eftersom det troligen finns ytterligare utrymme i Matematik 2 för nytt material föreslår jag att man inför en punkt om kombinatorik (passar till sannolikhetsläran), grafer och träd. Detta område kräver inga förkunskaper, är nytt för eleverna och kan göras roligt och intressant. Det har dessutom många tillämpningar. Det ingår idag i kursen diskret matematik, vilket betyder att det finns material och kunskap, även om presentationen kan behöva stöpas om något för Matematik 2.

En punkt om modellering anknuten till programmets ämnen bör ingå, liksom en särskild punkt om datorprogram och miniräknare.

Matematik 3

Denna kurs läses av alla elever på NV och TE. Den kommer troligen att krävas för behörighet för ekonomutbildningar och därmed läsas av elever på SP-programmet.

Punkten om metoder för att lösa andragradsekvationer mm är oklart skriven. Den vanliga metoden att lösa andragradsekvationen med en formel ska ingå men det är inte vad som står. Det borde stå: Olika metoder att lösa andragradsekvationer och polynomekvationer av högre grad, inklusive metoder som utnyttjar faktorisering, metoder för att lösa exponentialekvationer.

Punkten om numerisk ekvationslösning är tveksam. Betydelsen av insikt i teorier för numeriska metoder minskar på denna nivå. Konvergensfrågor är inte så viktiga när man har så goda räknehjälpmedel. Principerna för iteration däremot är intressant och ökar i betydelse även på gymnasienivå. Man borde dock finna andra exempel och inkludera momentet iteration i den disktreta matematiken. Detta moment kan strykas utifrån behovet av att skapa mer utrymme för de matematiska förmågorna.

En punkt om modellering anknuten till programmets ämnen bör ingå, liksom en särskild punkt om datorprogram och miniräknare.

Matematik 4

Denna kurs kommer att läsas av många elever på TE-programmet och en stor majoritet på NV-programmet. Den kommer troligen att krävas som behörighet för ingenjörsutbildningar.

I denna kurs bör en större självständigt uppgift ingå liksom i dagens Matematik D-kurs. det är en självklarhet att arbeta med något större uppgifter för att träna de fem förmågorna.

Punkten om trigonometri ska kompletteras med de trigonometriska sambanden utgående från en rätvinklig triangel, som föreslås flyttas från Matematik 1.

I denna kurs bör också ingå en mer omfattande kurs i geometri, inklusive satser med bevis, trianglar och cirklar, rymdgeometri, konstruktioner med ”passare och linjal” (med datorprogram).

Asymptoter kräver någon form av gränsvärdesbegrepp, och det är därför tveksamt om asymptoter bör införas. De kan eventuellt istället motiveras rent geometriskt.

Mot bakgrund av att många av eleverna kommer att behöva diskret matematik i sina fortsatta studier och att det är ett intressant och relativt lätt område som ökar i betydelse, bör man införa vissa delar av den diskreta matematiken i Matematik 4. Ett förslag är att införa talteori med delbarhet och primtal i Matematik 4.

För att skapa utrymme för den diskreta matematiken och geometrin bör integralerna flyttas till Matematik 5.

Punkten om bevismetoder flyttas till Matematik 5 och anknyts till diskret matematik och geometri.

En punkt om modellering anknuten till programmets ämnen bör ingå, liksom en särskild punkt om datorprogram och miniräknare.

Matematik 5 (det nationella alternativet)

Kursen kommer troligen att krävas för behörighet till civilingenjörsstudier, vissa naturvetenskapliga utbildningar och matematikerutbildningar. Den läses framförallt av elever på NV-programmet.

I förslaget ingår komplexa tal, differentialekvationer (modellering och lösning), vektorer, linjär algebra inklusive matriser, beräkningsmatematik.

Kursen förefaller vara ett hopplock utan mening och definitivt alldeles för fylld med innehåll.

Inget av allt detta är speciellt viktigt för högskolan. Den linjära algebran och vektorer brukar fungera bra i inledande kurser. För differentialekvationer gäller samma sak. Både linjär algebra och differentialekvationer riskerar att bli mycket tråkigt med fokus på algoritmer för lösning av differentialekvationer respektive ekvationssystem och matrisoperationer.

Vektoralgebra kan vara något mer motiverat eftersom vektorbegreppet (geometriska vektorer) är påtagligt och det visar sig praktiskt att lösa vissa geometriska problem med hjälpa av vektorer. men även till detta kan manställa sig tveksam.

Det gäller att göra kursen intressant och relevant för de som ska söka sig till högskolans matematikintensiva utbildningar.

Ett förslag är att fokusera innehållet på följande områden:

- logik såsom det momentet ingår i diskret matematik (satslogik, bevis, resonemang, definitioner, ekvivalenser, implikationer)
- tillämpningar av logiken på geometri och diskret matematik, dvs bevis och problemlösning som kräver resonemang
- integraler och tillämpningar av integraler (area, volym och tillämpningar från fysik och andra områden)
- sannolikhetslära med kontinuerliga fördelningar.

Ett självständigt mindre projekt med en valbar fördjupning inom ett område bör också ingå.

Matematik 5, fördjupningsalternativet

I förslaget har man ”förvisat” den diskreta amtematiken till exempel på sådant som kan ingå i lokalt definierade fördjupningskurser. Detta är enligt vad som redan påpekats ett allvarligt misstag eftersom den diskreta matematiken försvarar sin plats i de nationella kurserna.

För att ge möjligheter för mer humanistiskt inriktade elever som intresserar sig för att gå vidare i matematik vore det värdefullt att kunna erbjuda ett alternativ som är inriktat på matematikhistoria och intressanta tillämpningar. Detta är svårt för läroboksförfattare och lärare att arbeta med utan riktlinjer från Skolverket.

Det motiverar att Skolverket inför ytterligare en fördjupningskurs i Matematik som innehåller matematikens historia med tillämpningar inom konst, arkitektur, brobyggnad, parkanläggning, teater, musik. Modern matematisk konst som fraktaler kan ingå. Spännande moderna tillämpningar som kodning och krytpering kan ingå. Illustrationer av matematiken i inbyggda datorer med fasta program i alla apparater som omger oss kan illustreras. Kursinnehållet får delvis göras intuitivt när det gäller själva matematiken.

Kursen kan bygga på Matematik 2 och vara valbar på alla program.

Kritik av terminologi i förslaget

Första punkten i Matematik 1 handlar om ”reella tal skrivna på bråkform, decimalform och som potenser med heltalexponent”. I Matematik 2 återkommer liknande formuleringar ”… tal skrivna på olika former, inklusive potenser med rationella exponenter..”. I matematik 3 återkommer liknande formuleringar: ”…tal skrivna på olika former, inklusive absolutbelopp…”. Terminologin är förvirrande. Absolutbelopp är ingen ”form” för att skriva ett tal. Enklast är att tänka sig att tal kan skrivas på i princip tre ”former”: bråkform, decimalform och tiopotensform (heltalsexponenter). Andra sätt att skriva tal – potenser, absolutbelopp, kvadratrötter osv – kan uppfattas som uttryck vars värden är tal. Meningen är väl i Matematik 2 respektive 3 att man ska lära sig hantera potenser med rationella expontoner respektive absolutbelopp. Detta bör inte blandas ihop med att tal kan skrivas på olika ”former”.

Gerd Brandell
Matematikcentrum
Lunds universitet
Box 118
221 00 Lund
Gerd.Brandell@math.lth.se