Matematikens ofullkomlighet.

January 29, 2003

1 Inledning

Matematiken kan betraktas som den mest exakta och i någon mening den mest fullkomliga av alla vetenskaper.

En klassisk syn på matematik är att det är en vetenskap inom vilken man alltid utgår ifrån orubbliga sanningar och med hjälp av sträng deduktion sedan härleder nödvändiga logiska följder av dessa sanningar. Detta är åtminstone den syn på matematik som man lätt kan få genom ett överdrivet studium av klassisk *euklidisk geometri*, såsom den presenterades under ett par årtusenden efter publiceringen av Euklides "Elementa" ca år 300 f. kr.

Vi kommer i denna föreläsning att diskutera denna klassiska bild av matematiken.

Vi skall göra detta genom att försöka beskriva matematikens *väsen*, samt skissera en del av huvuddragen i dess moderna utveckling.

Matematiken har utvecklats mycket kraftigt under 1800 och 1900-talet och en av räknemaskinens pionjärer, Charles Babbages ord från 1813:

"Den matematiska litteraturens guldålder är utan tvekan förbi"

har det efter honom varit mycket få som skulle ha vågat upprepa.

Bertrand Russell gick i själva verket så långt att han knappt hundra år efter Babbage hävdade att:

"Den rena matematiken upptäcktes av Boole i ett arbete som han kallade "Laws of Thought" (1854)."

Själv skulle jag istället vilja hävda att matematiken är stadd i ständig utveckling. Den förändring av matematiken under 1800-talet som Russell åsyftar ovan var verkligen omvälvande, men byggde självfallet på en lång rad tidigare arbeten.

En del matematiker och logiker under slutet av 1800-talet såsom Boole, Frege, Cantor, Peano, Russell, Whitehead och Hilbert, drömde kanske om en från verkligheten frigjord matematik, ekvivalent med formell logik och fullkomlig i sin sublima brist på traditionell mening och innebörd. Bertrand Russell gav exempelvis 1901 följande populärvetenskapliga definition:

"Matematiken kan alltså definieras såsom den vetenskap i vilken vi aldrig vet vad vi talar om, och inte heller huruvida det vi säger är sant".

Denna dröm om matematiken som ett fullkomligt om än meningslöst logiskt spel förändrades dock ganska snart igen genom tankar av en ung österrikisk matematiker, Kurt Gödel. Gödel visade i ett banbrytande arbete år 1931, att i en viss mening var drömmen om fullkomlighet just en dröm.

Matematiken, eller för den delen den formella logiken, i sig tappade dock inte momentum av detta. Tvärtom. Matematikens utvecklingen under 1900-talet har varit enorm. Matematiker har med ännu större intensitet än tidigare fortsatt att söka sig både i nya riktningar och djupare ner i matematikens fundament och man kan i själva verket med fog hävda att vi just idag faktiskt har förmånen att leva mitt i matematikens guldålder.

Jag anser att så är fallet, men innan vi går vidare måste jag dock bekänna en sak. I denna föreläsning kommer jag, i en viss mening, inte alltid att hålla mig till sanningen. Notera att jag inte säger: "Jag är en lögnare", ... än, bara att jag inte alltid kommer att tala sanning.

Matematiker har ofta ett upptränat behov av att inte bara tala sanning, utan i själva verket alltid försöka tala om vad de uppfattar som *hela* sanningen eller att alternativt inte säga någonting alls.

Möjligen medför detta att matematiker ibland kan uppfattas som inbundna och att när de vid tillfälle öppnar munnen tröttnar ofta eventuella åhörare relativt snart och önskar att de, alternativt matematikern, befann sig på annan plats.

Jag skall därför i det följande försöka att inte tala sanning hela tiden.

Detta behov hos matematikens utövare av att alltid säga den precisa sanningen tror jag kan vara ett av skälen till att vi till synes har varit mindre framgångsrika än exempelvis våra nära släktingar *fysikerna* i att saluföra nya rön.

Jag tror inte att teorin bakom exempelvis fysikaliska begrepp som "svarta hål" eller "supersträngar" är lättare att verkligen förstå än teorin bakom matematiska begrepp som "exotiska sfärer" eller "minimerande strömmar", men jag tror som sagt att matematiker traditionellt har varit sämre på att popularisera sin kunskap.

Detta kan självfallet bero på att det vi gör har mindre direkt allmänintresse.

Naturligtvis kan man också misstänka att det beror på att vi inte alltid klart har förstått det vi arbetar med.

Nobelpristagaren i fysik 1965 den legendariske Richard Feynman ombads en gång av en kollega att förklara varför en viss typ av partiklar har ett visst uppförande. Han lovade då att förbereda en föreläsning om detta riktad till nybörjarstudenter vid universitetet.

Ett par dagar senare kom dock Feynman tillbaka och sa: "Jag kunde inte reducera det till "ettbetygsnivå". Det betyder att vi i själva verket inte har förstått fenomenet."

Man kan självfallet i detta sammanhang inte motstå att citera Esaias Tegnérs epilog vid magister-promotionen i Lund 1820:

> "Hvad du icke klart kan säga, vet du ej;
> med tanken ordet föds på mannens läppar:
> det dunkelt sagda är det dunkelt tänkta."

Det är också obestridligen så att det ibland kan vara lättare att ge *alla* detaljer i ett resonemang än en sammanfattning av de väsentliga idéerna.

Till ett slags försvar för intresset för detaljer måste jag dock framhålla att det inom matematiken ibland är så att sanningen till dels kan ligga dold i subtila detaljer och matematikens utövare tränas i själva verket i stor utsträckning till att uppfatta alla påståenden de ställs inför bokstavligt.

Under alla omständigheter bygger nästan all matematisk kommunikation på stringens och precision i de uttalanden man gör. Låt mig illustrera detta genom att berätta en liten traditionell *matematikanekdot*.

Anekdot 1. *Tre goda vänner åkte tillsammans tåg genom Skottland. En var konstvetare, den andre var fysiker och den tredje slutligen var givetvis matematiker.*

Konstvetaren sitter och tittar ut genom tågfönstret och plötsligt får han i en hage i det förbipasserande skotska landskapet se ett svart får. Han utbrister då:

-Men titta, fåren i Skottland är svarta!

Fysikern och matematikern tittar förvånade på honom. Fysikern ler lite och säger:

-Du menar att du har observerat ett svart får i en hage i Skottland.

Matematikern suckar vid detta uttalande djupt, skakar på huvudet och utbrister därefter:

-Nej! Det du menar är följande: Det finns minst en hage i Skottland som innehåller minst ett får vilket har minst en sida vilken är svart.

Som alla historier vilka har till syfte att vi skall dra på smilbanden, så rymmer denna anekdot självfallet ett korn av sanning. Matematiker tränas verkligen till att vara mycket precisa i sina uttalanden.

Låt oss nu syna ett klassiskt paradexempel på denna stringens och precision.

2 Matematikens väsen. Den axiomatiska metoden.

En av alla tiders mest inflytelserika böcker är Euklides “Elementa”. Inte mycket är känt om Euklides själv, men man vet att han cirka 300 f.kr. arbetade vid biblioteket i Alexandria. I tretton “böcker” eller kapitel med den gemensamma titeln “Elementa” presenterade han en del av dåtidens kunskap om geometri och aritmetik.

“Elementa” är en lärobok i matematik, och som sådan den i särklass mest framgångsrika i historien. Den slog ut alla medtävlare och var det dominerande standardverket inom elementär matematikundervisning under drygt tvåtusen år. I “Elementa” presenteras systematiskt det man kan kalla den *axiomatiska metoden* och dess inflytande kan knappast överskattas.

“Elementa” blev under två millenier stilbildande för snart sagt all vetenskaplig verksamhet där man gjorde anspråk på någon form av stringens i argumentationen.

“Elementa” blev också, ända fram till 1800-talet, en mall för hur matematik skulle framställas. Den bidrog därför självklart enormt till *bilden av matematiken* och till hur själva ämnet som sådant uppfattades.

Som exempel kan nämnas att då Isaac Newton kom till Cambridge 1661 var en av de första texterna han studerade just Euklides "Elementa" och då Newton senare skrev sin "Principia mathematica" i vilken han lade fast grunderna för det vi idag kallar klassisk fysik och astronomi använde han sig till stor del av den euklidiska geometrins språkbruk. Detta trots att han, liksom Leibniz, vid utarbetandet av differentialkalkylen i högre grad än i sin senare presentation använde aritmetik och analys.

Leibniz utarbetade oberoende av Newton differentialkalkylen och hans notation och språk blev det som mest påverkade hur vi idag presenterar materialet.

Detta gör att det idag är relativt lätt att läsa Leibniz i orginal, men mer påfrestande att läsa Newton. Trots allt kan man kanske hävda att det var klokt av Newton att (om han nu hade kunnat) inte *både* presentera nya idéer och ett helt nytt sätt att framställa dem. Nya idéer har troligen lättare att accepteras om de presenteras i traditionell form.

I Euklides "Elementa" används som sagt *den axiomatiska metoden*. För att illustrera vad denna metod innebär skall vi betrakta följande utsaga ur just "Elementa":

Utsaga.
Vinkelsumman i en triangel motsvarar ett halvt varv.

Antag att vi klipper ut en stor triangel ur ett stort pappersark. Inte en rätvinklig eller liksidig triangel, utan rätt och slätt en "allmän" tringel. Vi betecknar dess hörn med bokstäverna A, B och C. Antag nu att sidan AC är den längsta. Drag nu en linje L mellan mittpunkten P på sidan AB och mittpunkten Q på sidan BC. Vik nu, längs linjen L, ner hörnet B över linjen L så att hörnet B hamnar på sidan AC. Vik sedan hörnet A över en linje genom P ortogonal mot L och slutligen på samma sätt hörnet C över en linje genom Q ortogonal mot L.

Vi har nu bevisat att vinkelsumman i en triangel motsvarar ett halvt varv (eller 180 grader), eller har vi inte?

Det finns ett antal invändningar mot ovanstående argument.

Vi har endast utfört "vikschemat" för en specifik "triangel". Hur vet vi att det skulle fungera för vilken "triangel" som helst? Och när det kommer till kritan, har vi faktiskt inte utfört det för "en triangel", utan för en trekantig "pappersbit". Om vi nu skulle acceptera en *mycket lös* definition av triangel såsom varande just en sådan trekantig pappersbit, så kan vi ändå på begränsad tid endast utföra *vikexperimentet* för ett ändligt antal sådana "trianglar".

Dessutom kan vi fråga oss om vi verkligen skulle se någon skillnad om vinkelsumman i allmänhet istället svarade mot lite mindre än ett halvt varv, säg t.ex. $179{,}9$ grader?

Vi har också antagit att vinklarna inte ändras då vi viker pappret. Ett antagande som kan kännas rimligt då man har att göra med papper, men ett antagande som blir mer dubiöst om vi klipper ut vår "triangel" ur ett mer deformerbart material som exempelvis ett gummiark.

Nej, det som om möjligt har övertygat er om att påståendet om “vinkelsumman i en triangel” verkligen stämmer är någon slags *idealbild* av en triangel som ni eventuellt bär i ert inre. Ni har i så fall då vi utförde vikningarna ovan, utfört motsvarande mentala operationer på er *idealbild* av en triangel, och så övertygats om att påståendet verkar stämma.

Detta, att i sitt inre vara övertygad om ett påståendes giltighet, är dock i allmänhet inte tillräckligt för att exempelvis kunna *kommunicera* denna insikt till någon annan individ som saknar den.

För att över huvud taget kunna *diskutera* ett påståendes giltighet måste vi precist kunna definiera de ingående storheterna och objekten.

För att kunna reda ut påståendet om en triangels vinkelsumma måste vi alltså till att börja med förklara precis vad vi menar med *en triangel* och *en vinkelsumma*. Hur skulle då en definition av en triangel kunna se ut?

En sådan definition bör vara så enkel som möjligt och ändå fånga så många egenskaper som möjligt hos den *platonska idealbild* av en triangel som vi bär inom oss.

Det var ett sådant program som Euklides i sitt verk “Elementa” försökte genomföra rörande all grundläggande plan geometri.

Euklides utgick ifrån ett antal grundbegrepp såsom *punkt*, *linje* och *plan* och gav sedan ett litet antal *axiom* vilka gav ett antal *grundrelationer* mellan dessa begrepp.

Euklides första axiom (eller postulat) var exempelvis linjeaxiomet. Något omformulerat lyder det:

Linjeaxiomet.
Genom två skilda punkter går det precis en linje.

I så kallade *definitioner* infördes sedan nya härledda begrepp och i *propositioner* och *teorem* presenterades nya giltiga relationer mellan de införda begreppen. Giltigheten av dessa bevisades med hjälp av logisk slutledning.

Detta är den så kallade *axiomatiska metoden*, såsom den presenterades av Euklides.

Ett sätt att beskriva processen ovan är att säga att det handlar om ett växelspel mellan *Verkligheten* (papperstrekanter) och de erfarenheter vi där får, *Idévärlden* (“platonska idétrianglar”) där våra idealbilder av olika objekt finns och slutligen det *formella språk* (axiomsystemet med härledningsregler) som “matematiken använder sig av”.

Det är i detta sammanhang intressant att fråga sig vilka “idealbilder” vi är i stånd att uppfatta. Vi lägger ju exempelvis märke till en mängd symmetrier och geometriska former i vår omvärld. Det behövs bara några vagt antydda linjer och plötsligt *ser vi* exempelvis en cirkel. Vad är det som bestämmer vad vi uppfattar som mönster och regelbundenheter?

Vi har troligen mycket svårt att tänka oss någon alternativ form av intelligens vilken till exempel *inte* kan uppfatta det grundläggande mönstret av att *lägga ett till ett,* vilket *naturligt* leder till den platonska idealbilden av de positiva heltalen.

En av *intuitionisternas* (vilka vi återkommer till) föregångare Leopold Kronecker gav uttryck för detta i sitt berömda yttrande under en konferens i Berlin 1886:

"De hela talen är skapade av Gud, allt annat är människans hantverk".

I en känd artikel "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences" i "Communications in Pure and Applied Mathematics" (1960) diskuterar Eugene Wigner matematikens osannolikt stora framgång i att på ett användbart sätt beskriva vår omvärld.

Wigner ger i sin artikel inte några direkta svar på varför matematiken är så framgångsrik som strukturmodell då vi tolkar och beskriver verkligheten omkring oss, men en naiv förklaring till matematikens inflytande är en variant av den *antropiska principen*:

Matematiken är så oerhört framgångsrik som ett sätt att beskriva världen på, helt enkelt på grund av att de enda samband vi kan förnimma är de matematiska. Vår hjärna skulle enligt denna princip endast vara i stånd till att varsebli de mönster vilka till sin natur är "matematiska".

Euklides "Elementa" förblev under mycket lång tid ett mönster för logisk klarhet vid exposition, men sammanblandningen mellan å ena sidan vår inre *idévärld* med dess *idealbilder* och å andra sidan det formella språk med vilket vi försöker uttrycka dem, var trots allt påtaglig i "Elementa". På många ställen hänvisas till "geometriskt uppenbara sanningar".

Euklides axiomsystem var uppsatt för att *beskriva* egenskaper hos ett verkligt existerande system. Man ansåg sig alltså vara i besittning av en *modell* vilken man var ute efter att "fånga" i ett axiomatiskt system.

Det var detta en del matematiker och logiker under 1800-talet försökte frigöra sig ifrån och det var denna frigörelseprocess som Bertand Russell betecknade som en födelse av "den rena" matematiken. Russell skriver 1901 i "International Monthly":

"1800-talet, som var stolt över att ha uppfunnit ångmaskinen och utvecklingsläran, skulle ha kunnat grunda ett mer legitimt anspråk på ryktbarhet på upptäckten av den rena matematiken."

Den stora förändring som Russell här åsyftar handlade verkligen om en *omtolkning av matematikens väsen*. Matematikens väsentliga karaktäristika enligt detta nya sätt att se är inte dess *innehåll* utan dess *form*.

Om något presenteras genom att man introducerar symboler med vilka man får göra operationer enligt precisa logiska regler och det enda kravet man härvid lägger på operationerna är logisk motsägelsefrihet så är det matematik man har att göra med. Först i ett senare läge vänder man sig "utåt" och söker efter "verkliga modeller" för det logiska systemet. Matematiken är enligt detta synsätt *den vetenskap* *som drar logiskt nödvändiga slutsatser från en given klass av axiom och giltigheten i slutledningarna beror inte på någon särskild tolkning av axiomen*. Man har alltså satt likhetstecken mellan matematik och formell logik.

En inspirationskälla till denna revolution som bör nämnas var Lobachevsky, Bolyai och Gauss upptäckter i början av 1800-talet av *icke-euklidiska geometrier* vilka uppfyllde alla Euklides axiom utom parallellaxiomet.

Under flera tusen år hade matematiker varit besvärade av parallellaxiomets status.

Parallellaxiomet kan omformulerat uttryckas på följande sätt:

“Parallellaxiomet”.

Genom en given punkt i ett plan kan man dra en och endast en linje vilken är parallell med en given linje i planet.

Grundfrågan var om det var ett nödvändigt axiom eller om det var en logisk följd av de andra axiomen.

Upptäckten av icke-euklidiska geometrier vilka uppfyllde alla Euklides axiom utom parallellaxiomet, visade att parallelaxiomet verkligen var oberoende av de övriga axiomen.

Det visade dessutom tydligt att det kunde finnas flera olika tänkbara *modeller* för ett givet axiomatiskt system.

Man kan här nämna att, i det vi idag kallar *det hyperboliska rummet*, vilket var vad Lobachevsky, Bolyai och Gauss upptäckte, så är vårt påstående ovan om vinkelsumman i en triangel felaktigt. En *hyperbolisk triangel* har alltid en vinkelsumma vilken är *strängt mindre* än 180 grader.

Icke-euklidisk geometri fick en enhetlig framställning i Bernhard Riemanns banbrytande docentföreläsning från 1854 vid universitetet i Göttingen. Här gavs konkreta tolkningar av olika icke-euklidiska geometrier och grunden lades för det som kom att kallas just *Riemanngeometri*. Denna gren av matematiken blev för övrigt senare grundläggande i den matematiska beskrivningen av Einsteins allmänna relativitetsteori.

Samma år som Riemann gav sin docentföreläsning publicerade den väsentligen autodidakte engelsmannen George Boole sitt verk “Investigation of the Laws of Thought”. I detta presenterade han grunderna i det som idag går under benämningen *boolesk algebra*. I denna algebra *räknar* man inte med traditionella *tal* utan man räknar med *mängder*. Dessa mängder i sin tur kan tänkas bestå av tal, punkter, idéer eller andra objekt. Förutom att väsentligen skapa den formella logiken, så kan Booles verk ses som en av startpunkterna för försöken att med hjälp av *mängdlära* axiomatisera all matematik.

Pionjärer i detta arbete var bland andra Richard Dedekind och Georg Cantor vilka oberoende av varandra utgående ifrån grundläggande mängdlära gav logiskt stringenta konstruktioner av de reella talen. Framförallt Cantor lade med sina studier av oändliga mängder grunden till den moderna mängdläran.

En annan av pionjärerna inom detta område var den tyske logikern och matematikern Gottlob Frege. Frege försökte ge en fast bas för den grundläggande aritmetiken genom att bygga på mängdlära. I sin bok 1884 “Die Grundlagen der Arithmetik” gav sig Frege bland annat i kast med frågan:

Vad är egentligen ett naturligt tal?

Genom att använda grundläggande axiom för mängdlära gav Frege en definition av naturliga tal, eller mer allmänt *kardinaltal*, vilken senare kom att förespråkas av bland andra Russell.

Vad menar vi då vi säger att två mängder innehåller lika många element? Frege menade att två mängder innehåller lika många element om och endast om det finns en *ett till ett relation* mellan elementen i mängderna. Det vill säga till varje element i den ena mängden kan vi ordna precis ett element i den andra och vice versa.

Frege definierade sedan *antalet element* i en mängd som klassen av alla mängder vilka innehåller lika många element som ursprungsmängden.

Exempelvis skulle det naturliga talet fem då vara klassen (eller mängden) av alla mängder vilka innehåller lika många element som de flesta av oss har fingrar på höger hand.

Detta kan synas vara endast avancerad ordvrängning, men finessen är att allt detta enkelt kan formuleras med hjälp av begrepp ifrån den grundläggande mängdläran. Vi försöker alltså reducera allmänna matematiska påståenden rörande exempelvis heltalen till påståenden inom mängdläran.

För mängdläran ger vi sedan ett litet antal axiom och härledningsregler. Vi kan sedan utifrån detta bygga upp all matematik. Frege försökte sig på att göra detta för aritmetiken i sin “Die grundlagen der Arithmetik” och i den mer omfattande “Grundgesetze der Arithmetik” (volym I, 1893 och volym II, 1903).

En som noggrannt läste Freges verk var Bertrand Russell.

Frege skriver 1903 i ett appendix till sin “Grundgesetze”:

“Inget kan vara mer ovälkommet för en vetenskapsskribent än att grunden för hans byggnadsverk skakas efter det att arbetet är avslutat. Jag har hamnat i denna situation på grund av ett brev (innehållande en paradox) av Herr Bertrand Russell just som tryckningen av denna andra volym nästan var avslutad.”

Frege tröstar sig sedan med att han trots allt inte är ensam i sin olycka, utan att alla vilka har använt begrepp som klasser och mängder då de konstruerat matematiska system är i samma situation. Frege nämner i detta sammanhang Dedekind.

Paradoxen vilken Frege anspelar på är följande självrefererande konstruktion:

Russells paradox

Låt M vara mängden av alla mängder vilka inte är element i sig själva. Gäller det då att M är ett element i M?

Antar vi här att M inte är ett element i M, måste vi sluta oss till att M är ett element i M. Om vi å andra sidan antar att M är ett element i M, så betyder det att M inte är ett element i M. Vi leds alltså oundvikligen till en motsägelse!

Russells paradox, och liknande paradoxer vilka upptäcktes, kan tas om hand genom en del tekniska tillägg i de grundläggande axiomen och definitionerna för mängdläran.

Den här typen av logiska problem kan enkelt uttryckt uppstå då man *kombinerar oändligheten med självreferenser*.

Uppkomsten av dessa paradoxer visade dock hur svårt det är att överblicka konsekvenserna av ett, i detta fall mycket litet, antal grundläggande axiom.

Ett av den grundläggande mängdlärans axiom som ställde till problem var det så kallade urvalsaxiomet. Detta axiom handlar om en viss process för att kunna bilda nya mängder utifrån redan givna. Urvalsaxiomet säger att givet en familj parvis disjunkta mängder, så kan vi bilda en mängd vilken innehåller precis ett element ur var och en av de givna.

Detta axiom kan tyckas naturligt, men för vissa typer av oändliga mängder leder det direkt till om inte nya paradoxer så åtminstone icke intuitivt uppenbara resultat. Man insåg tidigt att man med hjälp av urvalsaxiomet enkelt kan konstruera delmängder av exempelvis de reella talen vilka inte i någon rimlig mening *är mätbara*. Denna insikt ledde 1924 matematikern Stefan Banach och logikern Alfred Tarski till att konstruera sin berömda "paradox", i vilken man utgår ifrån ett givet klot; man skär det i ändligt många delar och sätter sedan ihop delarna till *två lika stora* klot som det man hade från början!

Russell gav som bekant inte upp den logicistiska tesen, utan fortsatte på den kurs Frege och andra stakat ut.

I ett heroiskt försök att lägga en formell logisk grund för hela aritmetiken skrev han 1910–1913 tillsammans med Whitehead deras berömda verk "Principia Matematica".

Russell och Whitehead försökte i "Principia" bland annat svar på en del frågor ställda av en av förra sekelskiftets matematiska förgrundgestalter, nämligen dåvarande professorn i matematik i Göttingen, David Hilbert. Hilbert höll bland annat vid världskongressen i matematik i Paris år 1900 ett numera legendariskt anförande, i vilket han presenterade 23 matematiska problem för det tjugonde århundradet.

De två första av dessa problem rörde direkt de undersökningar inom matematikens grundvalar som inletts av bland andra Boole, Cantor och Frege.

Hilberts första problem rörde frågan om det finns någon mängd med ett strängt större antal element än de naturliga talen, men ett strängt mindre antal element än de reella talen. För att rätt förstå denna fråga, måste man här noga notera att Cantor menade samma sak som Frege med *lika många*.

Cantor hade arbetat mycket med denna fråga och hans hypotes, vilken går under namnet *kontinuumhypotesen*, var att någon sådan mängd inte existerade.

Hilberts andra fråga var om de axiom för aritmetiken som exempelvis Russell och Whitehead kom att använda i sin "Principia" var *konsistenta* eller med andra ord motsägelsefria.

Denna fråga lämnades dock, som vi strax skall bli varse av naturliga skäl, obesvarad i "Principia".

David Hilbert hade i själva verket själv, kanske mer än någon annan, bidragit till den *logicistiska revolution* som svepte fram över matematiken kring förra sekelskiftet.

Det var Hilbert som 1899 i sin “Grundlagen der Geometrie” slutligen formaliserade axiomsystemet för euklidisk geometri och visade dess logiska ekvivalens med aritmetikens axiomsystem.

Hilbert sade själv angående detta arbete att begreppen “punkt”, “linje” och “plan” överallt lika gärna kunde ersättas med “stol”, “bord” och “ölmugg”.

Det var med andra ord *formen* och inte *innehållet* som var centralt.

År 1931 publicerade som bekant så den då 25-årige Kurt Gödel sin uppsats om formellt oavgörbara utsagor i “Principia matematica” och liknande axiomsystem för aritmetiken.

I detta arbete bevisade Gödel löst uttryckt att om ett axiomsystem för aritmetiken är motsägelsefritt, så kan detta inte bevisas inom systemet själv. Han visade också i detta fall på existensen av sanna men oavgörbara påståenden inom systemet.

Detta gav sålunda en väsentligen negativ lösning av Hilbert andra problem.

Gödel fortsatte att arbeta med *grundvalsfrågor* och år 1940 kunde han ge en kommentar till Hilberts första problem. Gödel visade då att *om* man i det grundläggande axiomatiska systemet för mängdläran *tillsammans med koninuumhypotesen* kan konstruera en motsägelse, så kan man göra detta även *utan kontinuumhypotesen*. Detta visar alltså att kontinuumhypotesen är konsistent med de övriga axiomen, eller mer precist uttryckt, att den inte ger upphov till några motsägelser om sådana inte redan fanns i systemet.

År 1963 visade så matematikern Paul Cohen det kanske då något förvånande resultatet att även *negationen* av kontinuumhypotesen är konsistent med de övriga axiomen.

Situationen liknar alltså den för parallellaxiomet i den euklidiska geometrin. Det verkar finnas flera *olika* slags mängdläror, med kontinuumhypotesen eller med dess negation.

Det måste dock poängteras att vi inte vet om något av dessa existerande system är motsägelsefritt i sig själv.

Denna forskning i matematikens grundvalar har fört med sig en ny tolkning av den axiomatiska metoden. *Logicismens* program att reducera all matematik till formell logik, har trots allt stark influerat utvecklingen inte bara inom forskningen.

Titta bara på exempelvis “den nya matematiken” i skolorna i västvärlden på nittonhundra sextio och sjuttio talet, då alla barn skulle lära sig mängdlära först av allt, emedan denna *var basen* för all annan matematik.

Vi har nu belyst flera av de svårigheter som matematiker har mött då de har försökt att *formalisera* matematiken. Man har kommit att inse att även den grundläggande aritmetiken inte nödvändigtvis är motsägelsefri och om den är det så är den inte fullständig. Så vad menar matematiker då när de säger att något är bevisat?

Låt oss titta på det kanske mest berömda av alla exempel.

3 Fermats sista sats. Vad är ett bevis?

Redan *under* Andrew Wiles tre föreläsningar om *modulära former, elliptiska kurvor och Galois representationer* under tre sommardagar i juni 1993 vid Isaac Newton institutet i Cambridge, började elektroniska brev att cirkulera i *matematikersamfundet* i vilka man spekulerade över om Fermats sista sats nu var bevisad.

Fermats sista sats säger att ekvationen

$$x^n + y^n = z^n$$

saknar andra heltalslösningar x, y, z än de triviala (som exempelvis $0^n + 1^n = 1^n$) om n är ett naturligt tal större än eller lika med tre.

Fermats sista sats hade gäckat alla matematiker under flera hundra år. Frågan är lätt att formulera, men hade visat sig vara notoriskt svår att besvara. En del matematiker hävdade till och med att det kunde röra sig om ett av Gödels berömda oavgörbara påståenden; och så kom nu här Wiles och påstod att han hade ett bevis.

Ganska snart efter föreläsningarna gick flera ledande talteoretiker ut och sa att de trodde på argumenten och nu ansåg att Fermats sista sats troligen var bevisad.

Manuskriptet offentliggjordes inte direkt, utan ett mycket litet antal experter satte istället igång med att granska det.

Tiden gick nu och manuskriptet publicerades inte. Tvärtom började rykten att cirkulera om *luckor och hål* i beviset vilka inte omedelbart kunde fyllas.

Så småningom blev det klart att det fanns ett ställe i det mycket långa beviset som verkligen inte höll. Wiles lyckades så småningom ta sig runt även denna grynna och den 26 oktober 1994 släpptes hela manuskriptet till den väntande allmänheten.

Manuskriptet publicerades 1995 i *Annals of Mathematics* och Fermats sista sats anses idag vara bevisad.

Vad menar då en matematiker när han säger att något är bevisat?

Förvisso menar han *inte* i allmänhet att påståendet i fråga är reducerat till ett påstående inom *den axiomatiska mängdläran* och att man sedan med ett ändligt antal logiska steg har visat att det följer av de grundläggande axiomen.

Nej, i allmänhet menar man att man *i grunden har förstått* de flesta av metoderna i beviset. Man är i dessa fall övertygad om att *bevisstegen* är naturliga och "korrekta" för problemet i fråga. På vissa punkter kanske man har haft problem med att omedelbart *se* ett logiskt steg i beviset och på dessa ställen har man då detaljgranskat argumentationen.

En matematiker är i allmänhet besatt av att finna det *rätta sättet att se* på ett givet problem. Finner man *denna rätta synvinkel*, skall påståendet framstå som oundvikligt och bevismetoden skall naturligt ge sig av sig själv.

Det är på grund av detta som en matematiker kan ställas inför ett problem; tänka på det en hel dag , en vecka eller till och med ett helt år och sedan utbrista: "Ja! Så dum jag var. Det är ju trivialt!"

Med *trivialt* menar då matematikern just att påståendet plötsligt, genom en ny synvinkel, blivit så naturligt att det "omedelbart" kan inses vara sant.

Låt mig för att försöka illustrera detta ge formeln för den *aritmetiska summan* och dess bevis, vilket ofta tillskrivs matematikernas okrönte konung Gauss då han som liten av sin lärare blev satt att summera de hundra första heltalen.

Påståendet är att för varje naturligt tal n så gäller formeln:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Det finns flera sätt att bevisa detta. Man kan exempelvis använda så kallad *induktion*. En sådan bevismetod ger dock i allmänhet inte den *omedelbara insikt* om formelns nödvändiga sanning, som följande förklaring:

Skriv upp summan, låt oss kalla den S, för ett givet naturligt tal n, först en gång och sedan en gång till *baklänges* under den första enligt följande:

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots\cdots\cdots+n &= S \\ n+(n-1)+\cdots+1 &= S. \end{aligned}$$

För att *få dubbla summan* kan vi nu summera n stycken *par* av tal vilka alla har summan $n+1$.

Vi *inser* nu förhoppningsvis att formeln för den aritmetiska summan med nödvändighet *måste* vara sann.

Det är på detta sätt de allra flesta matematiker arbetar i sitt dagliga värv. Man letar ständigt efter nya mönster och det naturliga sättet att *se* lösningen på sina problem.

Jag hoppas att ni upplevde beviset av formeln för den aritmetiska summan som *vackert*. Det är denna typ av skönhetsupplevelser som gör en del människor beroende av matematiken.

Matematiker i allmänhet bekymrar sig i själva verket föga om grundvalsfrågor, exempelvis om den axiomatiska mängdläran är konsistent eller ej.

Skulle vi i morgon upptäcka någon ny motsägelse i det grundläggande axiomsystem vi idag använder, skulle de flesta matematiker endast utbrista: “Vad intressant! Hur skall vi förändra systemet för att undvika detta? Vilket är det *naturliga sättet* att göra en sådan förändring?”

Efter detta skulle vi fortsätta att göra det vi gör, nämligen att ständigt leta efter nya mönster.

Låt mig avsluta denna föreläsning med att citera Bertand Russells kollega Hardys “A Mathematician’s Apology”:

“En matematiker är liksom en målare eller en poet en mönstermakare. Om hans mönster är mer beständiga än deras beror det på att de är gjorda av *idéer*.....

Matematikens mönster, liksom målarens eller poetens, måste vara *vackert*; idéerna måste liksom färgerna eller orden passa ihop på ett harmoniskt sätt. Skönhet är det första kännetecknet: det finns ingen bestående plats i världen för ful matematik.”