1 Dimensionsanalys och π-satsen.

Då man försöker ställa upp en matematisk modell för något fysikaliskt fenomen skall man alltid göra dimensionsanalys. Dimensionsanalys handlar om att undersöka hur givna fysikaliska parametrar "skalar" i förhållande till varandra. En skalning med en faktor $\lambda \in \mathbf{R}$ ges av operationen

$$\mathbf{R} \ni x \mapsto \lambda x \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

Vi börjar med att diskutera begreppet fysikalisk dimension.

I mekaniken utgår man ifrån ett antal oberoende grundstorheter. Dessa grundstorheter definieras genom att man konkret anger hur de skall mätas, och att de är oberoende betyder då löst uttryckt att "de kan mätas oberoende av varandra". Grundstorheterna i mekaniken är *längd* vars dimension betecknas L, *tid* vars dimension betecknas T samt *massa* vars dimension betecknas M. Begreppet fysikalisk dimension kan man se som en slags "sortbeteckning", där det är möjligt att jämföra fysikaliska parametrar, eller mätvärden, vilka är av samma sort.

För att kunna göra mätningar (vilka ju alltid bygger på jämförelser), definierar man grundenheter för de fysikaliska grundstorheterna, Metern för längdmätningar, Sekunden för tidmätningar samt Kilogrammet för att mäta massa.

Då vi har valt en grundenhet för längdmätning, exempelvis metern, kan vi uttrycka varje annan längd som en (positiv) reell multipel, l, av denna grundenhet.

Grundenheterna kan givetvis väljas på oändligt många olika sätt.

Vi kan bestämma oss för att mäta längd i fot, meter, stadion eller någon annan längdenhet.

Vi kan transformera från mätningar, (l), i en längdenhet till en annan genom skalning. Exempelvis skalar vi om från fot till stadion genom

$$l \mapsto \frac{l}{600}. \tag{2}$$

Utifrån våra fysikaliska grundstorheter definierar vi s.k. härledda storheter. Härledda storheter definieras också med hjälp av konkreta beskrivningar av hur man mäter dem. Ett exempel är storheten hastighet. Hastighet definieras med hjälp av grundstorheterna längd och tid och är ett mått på hur många längdenheter någonting förflyttar sig per tidsenhet. (Hastighet har också en *riktning* till skillnad från begreppet fart.) Hastighetens fysikaliska dimension, V, blir då längd genom tid, $V = LT^{-1}$. Detta inses genom följande skalningsbetraktelse.

Antag att vi valt grundenheter för storheterna längd och tid. Skalar vi om grundenheterna med faktorerna λ_1 respektive λ_2, kommer våra längd och tidsmätningar att skalas om enligt

$$(l,t) \mapsto (\lambda_1 l, \lambda_2 t). \tag{3}$$

Detta medför, p.g.a. definitionen av hastighet, att hastighetsmätningar, v, kommer att skalas enligt

$$v \mapsto \lambda_1 \lambda_2^{-1} v. \tag{4}$$

Vi säger att vi har sambandet $V = LT^{-1}$ mellan storheterna.

Andra härledda storheter i mekaniken är exempelvis kraft vars dimension är massa gånger längd genom tid i kvadrat, MLT^{-2}, eller area vars dimension är längd i kvadrat, L^2.

Allmänt gäller att alla nya fysikaliska storheter kommer att få dimensioner bildade genom att forma produkter och ta reella potenser av de dimensioner vi redan har. Är de enda givna grundstorheterna längd (L), tid (T) och massa (M), kommer alltså samtliga tänkbara fysikaliska dimensioner att ges av bildningar av typen $L^{\alpha_1}T^{\alpha_2}M^{\alpha_3}$, där $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ är reella tal.

Att de grundstorheter vi har valt är *obereoende*, betyder som sagt att de kan "mätas oberoende av varandra", eller något mer precist uttryckt, att de kan "skalas oberoende av varandra".

Vad vi väljer som oberoende grundstorheter är godtyckligt. Istället för att välja längd och tid, skulle vi kunna välja längd och hastighet. Att vi väljer längd och tid framför längd och hastighet beror på att det är lättare att göra direkta mätningar av längd och tid.

Inom fysiken försöker vi att finna funktionella samband mellan olika mätbara storheter. Dessa funktionella samband måste, om de skall ha fysikalisk relevans, vara oberoende av hur vi har valt basenheter för de ingående storheterna. De funktionella sambanden måste alltså vara vad vi kallar "skalningsinvarianta". Denna skalningsinvarians hos möjliga fysikaliskt relevanta funktionssamband är grunden för dimensionsanalys.

Låt oss illustrera genom att ge ett exempel.

Galileo Galilei observerade i början av 1600-talet att oljelamporna som svängde i vinddraget i kyrkorna i Pisa hade en periodisk svängningstid som var oberoende av deras maximala utslagsvinkel. Detta stämmer i själva verket bara någorlunda väl för en matematisk pendel (en punktformig massa hängande i ett masslöst snöre) om den maximala utslagsvinkeln är relativt liten. I annat fall kommer periodtiden att märkbart bero på utslagsvinklen. Analysen av en verklig fysisk pendel kan väsentligen återföras på analysen av en associerad matematisk pendel.

Låt oss utgående ifrån Galileis observation ponera att uppmätt periodtid, t, för en matematisk pendel endast beror av dess längd, l, dess massa, m, samt tyngdkraftsaccelerationen, g, vilken har dimensionen LT^{-2}.

Om det finns ett fysikaliskt relevant funktionellt samband av typen

$$t = f(l, m, g)\,, \tag{5}$$

så måste det vara skalningsinvariant. Detta eftersom "Naturen inte bryr sig om i vilka grundenheter vi mäter".

Antag alltså att vi skalar om grundenheterna enligt

$$(l, t, m) \mapsto (\lambda_1 l, \lambda_2 t, \lambda_3 m)\,. \tag{6}$$

Då kommer tyngdkraftsaccelerationen att skalas enligt

$$g \mapsto \lambda_1 \lambda_2^{-2} g\,. \tag{7}$$

Att (5) är skalningsinvariant betyder då att

$$\lambda_2 t = f(\lambda_1 l, \lambda_3 m, \lambda_1 \lambda_2^{-2} g) \quad \text{för alla} \ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{R}_+{}^3 . \tag{8}$$

Vi skall nu se vad detta ger för restriktioner på vilka möjliga utseenden funktionen f ovan kan ha. För att förenkla analysen av detta inför vi den dimensionslösa kvantiteten

$$\pi = t^2 g l^{-1} . \tag{9}$$

Att kvantiteten $\pi = t^2 g l^{-1}$ är dimensionslös betyder att den inte förändras vid skalning av de ingående parametrarna. Detta inses också omedelbart eftersom π vid skalning av grundstorheterna som ovan skalas enligt

$$\pi \mapsto \lambda_2^2 (\lambda_1 \lambda_2^{-2}) \lambda_1^{-1} \pi = \pi . \tag{10}$$

Ur (5) fås att

$$t^2 g l^{-1} = f_1(l, m, g) , \tag{11}$$

där vi har infört den nya funktionen $f_1(l,m,g) = g l^{-1} f^2(l,m,g)$.

Om (11) skall gälla, och vara ett fysikaliskt relevant funktionssamband, så måste alltså uttrycket

$$f_1(\lambda_1 l, \lambda_3 m, \lambda_1 \lambda_2^{-2} g) \tag{12}$$

i själva verket vara oberoende av $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{R}_+{}^3$. Detta innebär att f_1 måste vara en konstant funktion (varför?).

Vi sluter oss alltså till att

$$t^2 g l^{-1} = C \quad \Leftrightarrow \quad t = \sqrt{\frac{Cg}{l}} , \tag{13}$$

där $C > 0$ är en konstant som inte kan bestämmas med dimensionsanalys.

Vi har självfallet inte bevisat att denna formel, med en lämplig konstant C, gäller för periodtiden för en matematisk (eller en verklig fysisk) pendel. Vad vi däremot vet är nu att *om* det finns något fysikaliskt relevant funktionellt samband mellan periodtid, massa, pendellängd och tyndkraftsacceleration så måste det vara av formen (13).

I detta exempel såg vi hur kunskapen om en dimensionslös kvantitet hjälpte oss att enkelt finna ett möjligt fysikaliskt samband mellan de givna fysikaliska storheterna. Vi skall nu ge ett recept på hur man i ett helt allmänt fall kan finna samtliga dimensionslösa kvantiteter.

1.1 Tillämpning av Buckinghams π-teorem

Låt oss anta att $Z_1, \ldots, Z_m$ står för dimensionerna av ett antal oberoende basstorheter och att $X_1, X_2, \ldots, X_n$ är dimensionerna för ur dem härledda storheter. Eftersom storheter i fysiken alltid har dimensioner vilka fås genom att multiplicera reella multipler av “grunddimensionerna” med varandra gäller att samtliga dimensioner X_i kan uttryckas som

$$X_i = Z_1^{\alpha_{1i}} Z_2^{\alpha_{2i}} \cdots Z_m^{\alpha_{mi}} \quad ; \; i = 1, 2, \dots, n. \tag{14}$$

Om vi nu har infört grundenheter för mätning av grundstorheterna så kommer vi att kunna uttrycka mätningar av dessa grundstorheter som positiva mutltipler av grundenheterna d.v.s som positiva reella tal $z_1, z_2, \dots, z_m$. Vid byte av grundenheter kommer dessa tal att ändras med skalfaktorer

$$(z_1, z_2, \dots, z_m) \mapsto (\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2, \dots, \lambda_m z_m). \tag{15}$$

Måttet x_i, av en härledd storheten med dimensionen X_i kommer, i överensstämmelse med (14), därvid att skalas enligt

$$x_i \mapsto \lambda_1^{\alpha_{1i}} \lambda_2^{\alpha_{2i}} \cdots \lambda_m^{\alpha_{mi}} x_i. \tag{16}$$

Vi skall nu försöka finna samtliga “dimensionslösa bildningar” av typen

$$\Pi = X_1^{\beta_1} X_2^{\beta_2} \cdots X_n^{\beta_n}. \tag{17}$$

Att Π är dimensionslös betyder att måttet, π, av en storhet med dimensionen Π är skalningsinvariant (vid skalning av basstorheterna).

Eftersom ett sådant mått π, p.g.a. av ekvation (14) och ekvation (17), vid skalning av basstorheterna enligt ovan skalas enligt

$$\pi \mapsto \prod_{i=1}^{n} (\lambda_1^{\alpha_{1i}} \lambda_2^{\alpha_{2i}} \cdots \lambda_m^{\alpha_{mi}})^{\beta_i} \pi, \tag{18}$$

så kan vi sluta oss till att bildningen Π är dimensionslös om och endast om

$$\prod_{i=1}^{n} (\lambda_1^{\alpha_{1i}} \lambda_2^{\alpha_{2i}} \cdots \lambda_m^{\alpha_{mi}})^{\beta_i} = 1 \quad \text{för alla} \quad (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in \mathbf{R}_+{}^m. \tag{19}$$

Vi inför nu matrisen $A = [\alpha_{ij}]$ och noterar att (19) är ekvivalent med att

$$A\beta = \mathbf{0}, \tag{20}$$

där $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)^T$.

Att bestämmma samtliga dimensionlösa bildningar av typen (17), vilket svarar mot att finna samtliga skalningsinvarianta kvantiteter bland de fysikaliska parametrarna, är alltså ekvivalent med att bestämma nollrummet till den ovan införda matrisen A.

Låt oss nu använda detta genom att titta på ett lite mer krävande exempel på dimensionsanalys.

Antag att vi vill beräkna “dragkraften”, f, vilken verkar på ett föremål nedsänkt i en strömmande vätska.

Vi gissar att dragkraften f, vars dimension är LMT^{-2}, endast beror av vätskans densitet, ρ, vars dimension är ML^{-3}, vätskans strömningshastighet, v, vars dimension är LT^{-1}, föremålets diameter, d, vars dimension är L, samt vätskans viskositet, μ, vars dimension är $ML^{-1}T^{-1}$.

Om grundenheterna nu skalas enligt

$$(l,t,m) \mapsto (\lambda_1 l, \lambda_2 t, \lambda_3 m)\,, \tag{21}$$

så kommer sålunda våra mätningar att skalas enligt

$$(\rho, v, d, \mu, f) \mapsto (\lambda_1^{-3}\lambda_3\rho, \lambda_1\lambda_2^{-1}v, \lambda_1 d, \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}\lambda_3\mu, \lambda_1\lambda_2^{-2}\lambda_3 f)\,. \tag{22}$$

Vi inför nu matrisen A bildad enligt receptet ovan. Vi får sålunda

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Nollrummet till matrisen A, vilket bestäms genom att lösa ekvationen $A\beta = \mathbf{0}$, genereras av basvektorerna

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Detta innebär att samtliga dimensionlösa kvantiteter uttryckta i ρ, v, d, μ och f kan skrivas uttryckta i grupperna

$$\pi_1 = \frac{\rho v d}{\mu} \quad \text{samt} \quad \pi_2 = \frac{f}{\rho v^2 d^2}\,. \tag{25}$$

Buckinghams π-teorem (vilken kommer att bevisas i kursen “Matematiska strukturer”) säger nu att varje skalningsinvariant funktionssamband av typen

$$F(\rho, v, d, \mu, f) = 0 \tag{26}$$

kan skrivas uttryckt i de dimensionslösa grupperna π_1 och π_2.

Slutsatsen är sålunda att *om* det finns något fysikaliskt relevant funktionssamband mellan de fysikalika kvantiteterna ρ, v, d, μ och f, så måste det vara av typen

$$\pi_2 = G(\pi_1)\,, \tag{27}$$

d.v.s.

$$f = \rho v^2 d^2 G(\frac{\rho v d}{\mu})\,, \tag{28}$$

där $G : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ är en okänd funktion vilken ej kan bestämmas med dimensionsanalys.