Föreläsning 9

Linjär algebra (FMA420)
Anders Källén

Innehåll: Egenvärden och egenvektorer

Kapitel 10.1-10.2, 9.4

Efter dagens föreläsning måste du

- Kunna bestämma alla egenvärden och egenvektorer till en matris
- Kunna beräkna determinanter genom "inre operationer"

Inledande exempel

Föregående gång gjorde vi följande exempel

Exempel Spegling i planet $\pi : x_1 - x_2 - x_3 = 0$ (i en given ON-bas) har avbildningsmatrisen

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Men vi såg att om vi valde en ny bas, så fick den den enklare formen

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Den bas vi valde bestād av

1. två basvektorer i planet $\pi : \vec{u}_1 = (1,1,0),\ \vec{u}_2 = (1,0,1)$
2. en basvektor $\vec{u}_3 = (1,-1,-1)$ som är ortogonal mot planet π.

Varför valde vi den basen, och varför blev avbildningsmatrisen mycket enklare då?

För att svara på den frågan, tänk efter vad vektorerna $\vec{u}_i$ avbildas på. Geometriskt, inte genom att räkna!

Svaret är att de som ligger i planet, ändrar sig inte vid spegling:

$$A\vec{u}_1 = \vec{u}_1, \qquad A\vec{u}_2 = \vec{u}_2,$$

medan den återstående basvektorn avbildas på minus sig själv:

$$A\vec{u}_3 = -\vec{u}_3.$$

Det är vad A' berättar för oss.

Det gemensamma är att de är vektorer $\vec{u} \neq 0$ sådana att det finns ett tal λ, som beror på vektorn, sådant att

$$A\vec{u} = \lambda\vec{u}.$$

Sådana vektorer är väldigt bra att använda som bas när man ska förstå vad en linjär avbildning betyder.

Egenvärden och egenvektorer

Om A är en kvadratisk matris och x (ej nollvektor) en kolonnvektor sådan att det finns ett tal λ att

$$Ax = \lambda x,$$

så kallas x en egenvektor och λ ett egenvärde till A.

Anmärkning Förvillas inte av att jag nu kallar vektorn x istället för $\vec{u}$. Det beror på att i exemplet ville jag att ni skulle tänka i termer av geometriska vektorer, men i fortsättningen blir det mest en frågan om matrisräkning.

Exempel Vektorerna $x_1 = (1,1,0),\ x_2 = (1,0,1)$ är båda egenvektorer till A i föregående exempel med egenvärdet $\lambda = 1$ medan $x_3 = (1,-1,-1)$ är en egenvektor med egenvärdet -1.

Notera (tänk efter) att varje linjärkombination av x_1, x_2 är också en egenvektor till A med egenvärdet $\lambda = 1$.

Vårt problem nu är, finns det någon metod att hitta egenvektorer och egenvärden? Det verkar ju som att de kan hjälpa oss att beskriva och analysera linjära avbildningar!

Det gör det enligt följande resonemang. Om $x \neq 0$ löser ekvationen $Ax = \lambda x$, så löser den ekvationen $(\lambda I - A)x = 0$. Denna ekvation är alltså inte entydigt lösbar, varför matrisen $\lambda I - A$ inte kan vara inverterbar, vilket vi sett betyder att dess determinant måste vara noll:

$$\det(\lambda I - A) = 0.$$

Detta är en polynomekvation i λ, vars lösningar alltså ger vilka egenvärden som matrisen A har. Och till varje egenvärde kan vi sedan bestämma en eller flera egenvektorer. Polynomet $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ kallas det *karakteristiska polynomet* för A och ekvationen $p_A(\lambda) = 0$ den *karakteristiska ekvationen*.

Anmärkning Notera att den karakteristiska ekvationen garanterar att det finns ett $x \neq 0$ sådant att $(\lambda I - A)x = 0$.

För att se hur detta fungerar använder vi exemplet ovan.

Exempel För att bestämma egenvärdena till matrisen A i det inledande exemplet beräknar vi det karakteristiska polynomet $p_A(\lambda) =$

$$\det\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \lambda - \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \lambda - \frac{1}{3} \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - \frac{1}{3})\begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \lambda - \frac{1}{3} \end{vmatrix} + \frac{2}{3}\begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \lambda - \frac{1}{3} \end{vmatrix} - \frac{2}{3}\begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \lambda - \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - \frac{1}{3})((\lambda - \frac{1}{3})^2 - (\frac{2}{3})^2) + \frac{2}{3}(-\frac{2}{3}(\lambda - \frac{1}{3}) + (\frac{2}{3})^2) - \frac{2}{3}(-(\frac{2}{3})^2 + \frac{2}{3}(\lambda - \frac{1}{3}))$$

$$= (\lambda - \frac{1}{3})(\lambda - 1)(\lambda + \frac{1}{3}) + (\frac{2}{3})^2(1 - \lambda) - (\frac{2}{3})^2(\lambda - 1)$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$

Vi ser därför att A har två egenvärden $\lambda = 1$ (dubbelt) och $\lambda = -1$.

För att bestämma motsvarande egenvektorer måste vi lösa motsvarande ekvationssystem:

1. För $\lambda = 1$ ska vi lösa

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & 1 - \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 - \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases},$$

så lösningen är planet $x_1 - x_2 - x_3 = 0$. Egenvektorer är alltså alla vektorer (utom 0) i detta plan.

2. För $\lambda = -1$ ska vi lösa

$$\begin{pmatrix} -1 - \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -1 - \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -1 - \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}.$$

Här är den tredje ekvationen summan av de två ovan, så lösningen är den linje som utgör skärningen mellan planen $2x_1 + x_2 0 x_3 = 0,\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$. En kort räkning visar att det är $(x_1, x_2, x_3) = t(1,-1,-1)$. Alla vektorer på denna linje (utom 0) är alltså egenvektorer till egenvärdet $\lambda = -1$ till A.

Egenarbete

Gör först **10.1abc, 10.2abc** så att du får lite vana på att beräkna egenvärden och egenvektorer. Gör sedan **10.3**.

Ett ytterligare exempel

Vi ska nu använda det ovan till att försöka förstå vilken linjär avbildning som beskrivs av matrisen

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

För att undvika att räkna med bråk inför vi matrisen $B = 6A$ som endast har heltalselement. Vi ser då att λ är ett egenvärde till A precis då 6λ är ett egenvärde till B. Dessutom är egenvektorerna desamma (tänk efter!). Vi bestämmer därför det karakteristiska polynomet till B:

$$p_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-5 & 2 & -1 \\ 2 & \lambda-2 & -2 \\ -1 & -2 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-5)\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 \\ -2 & \lambda-5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & \lambda-5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ \lambda-2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-5)((\lambda-2)(\lambda-5)-(-2)^2) - 2(2(\lambda-5)-2) - (-4+(\lambda-2))$$

$$= (\lambda-5)(\lambda^2-7\lambda+6) - 4(\lambda-6) - (\lambda-6) = (\lambda-6)((\lambda-5)(\lambda-1)-5)$$

$$(\lambda-6)(\lambda^2-6\lambda) = \lambda(\lambda-6)^2.$$

Egenvärdena till B är alltså $\lambda = 0$ och $\lambda = 6$ (dubbelt), så egenvärdena till A är $\lambda = 0$ och $\lambda = 1$ (dubbelt).

Vi bestämmer nu egenvektorerna:

1. Egenvektorerna till egenvärdet $\lambda = 0$ får vi genom att lösa (kontrollera att du förstår varför!)

$$\begin{cases} -5x_1+2x_2-x_3 &= 0 \\ 2x_1-2x_2-2x_3 &= 0 \\ -x_1-2x_2-5x_3 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x_1+2x_2-x_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 12x_2+24x_3 &= 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (x_1,x_2,x_3) = t(1,2,-1)$.

2. Egenvektorerna till A med egenvärdet $\lambda = 1$ fås genom att lösa

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3 &= 0 \\ 2x_1+4x_2-2x_3 &= 0 \\ -x_1-2x_2+x_3 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+2x_2-x_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (x_1,x_2,x_3) = s(-2,1,0)+t(1,0,1)$.

Låt oss nu ta dessa egenvektorer som en ny bas. Med beteckningar från tidigare betyder det att vi tar $E' = ES$, där

$$S = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Det innebär att de nya och de gamla koordinaterna förhåller sig till varandra genom $X = SX'$ och vi ser då att ekvationen $Y = AX$ svarar mot $Y' = A'X'$ där $A' = S^{-1}AS$. Det betyder att matrisen

$$A' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \ldots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

blir matrisen för avbildningen i den bas som utgörs av egenvektorerna. Avläser vi matrisen ser vi att A betyder projektion på planet $\pi : x_1+2x_2-x_3 = 0$ längs vektorn $(1,2,-1)$. Med andra ord, den linjära avbildningen är den ortogonala projektionen på planet π.

Vi ser att om vi hittar en bas av egenvärden så får avbildningsmatrisen i denna bas en enkel, diagonalform, från vilken vi kan utläsa vad avbildningen är för något. Vi ska återkomma till det i nästa föreläsning.

Egenarbete

Gör först **10.7**, men tänk efter ordentligt innan du börjar räkna. Gör slutligen **10.4**.

Determinantberäkning

Att beräkna determinanter kan ibland göras lite enklare om man använder de två räknelagarna

$$\det(A_1'+A_1''\ A_2\ A_3) = \det(A_1'\ A_2\ A_3) + \det(A_1''\ A_2\ A_3),$$

$$\det(\lambda A_1\ A_2\ A_3) = \lambda\det(A_1\ A_2\ A_3),$$

eventuellt kombinerat med att man kan permutera kolonner om man bara ändrar tecknet på determinanten. Kom också ihåg att om man transponerar matrisen ändras inte determinanten!

Anmärkning Noter att den andra räkneregeln ovan medför att $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ om A är $n \times n$. I motsats till vad som gäller för matriser! Men man får inte blanda ihop vad som gäller för matriser och vad som gäller för determinanter – det är bara skrivsättet som är lika!

Exempel För att beräkna determinanten som bestämmer egenvärdena till speglingen ovan kan man istället gå tillväga på följande sätt (kolla noga upp varje steg!)

$$\begin{vmatrix} \lambda-\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \lambda-\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \lambda-\frac{1}{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \lambda-1 & \lambda-\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \lambda-\frac{1}{3} \end{vmatrix} =$$

$$(\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 1 & \lambda-\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \lambda-\frac{1}{3} \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \lambda+\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \lambda-\frac{1}{3} \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda+\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & \lambda-\frac{1}{3} \end{vmatrix} = (\lambda-1)((\lambda+\frac{1}{3})(\lambda-\frac{1}{3})-\frac{8}{9}) =$$

$$(\lambda-1)(\lambda^2-1) = (\lambda-1)^2(\lambda+1).$$

Determinanter av högre ordning kan definieras rekursivt, genom att man definierar dem enligt formeln för utveckling efter första kolonnen. En $n \times n$-determinant blir då definitionsmässigt värdet av en alternerande summa av n stycken termer, vilka alla är $(n-1) \times (n-1)$-determinanter. Dessa tolkas som en hypervolym med tecken och det vi gjort ovan för 3×3-determinanter kan vi göra för allmännare determinanter.

Exempel

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \ldots = -1.$$

Eftersom den är skild från noll kan vi dra slutsatsen att vektorerna $(2,1,3,-1)$, $(1,3,2,1)$, $(0,4,-1,2)$, $(1,1,2,0)$ i R^4 är linjärt oberoende och alltså bildar en bas för R^4.