Föreläsning 8

Linjär algebra (FMA420)
Anders Källén

Innehåll: Basbyten för linjära avbildningar

Kapitel 2.5, 7.6, 8.4-8.5

Efter dagens föreläsning måste du

- veta hur koordinaterna ändrar sig när du gör ett basbyte
- veta hur en avbildningsmatris ändrar sig när du gör ett basbyte
- bestämma avbildningsmatrisen för sammansatta och inversa avbildningar
- veta vad determinanten byter för linjära avbildningar

Basbyten i plan och rum

När vi anger en vektor i koordinater är det relativt en viss given bas. Byter vi bas ändrar sig koordinaterna. Frågan är hur.

Exempel Låt $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ vara en bas i planet och definiera

$$\begin{cases} \vec{e}_1' = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 \\ \vec{e}_2' = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \end{cases}.$$

Då gäller att även $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$ är en bas i planet (varför?). Om en vektor $\vec{u}$ har koordinaterna (x_1, x_2) i den första basen och koordinaterna (x_1', x_2') i den andra, så gäller då att

$$\vec{u} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 = x_1'\vec{e}_1' + x_2\vec{e}_2'.$$

Stoppar vi in uttrycken för den primmade basen i högerledet får vi att

$$\vec{u} = x_1'(3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2) + x_2'(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) = (3x_1' + x_2')\vec{e}_1 + (-2x_1' + 2x_2')\vec{e}_2.$$

Eftersom koordinaterna är entydigt bestämda följer att

$$\begin{cases} x_1 = 3x_1' + x_2' \\ x_2 = -2x_1' + 2x_2' \end{cases}.$$

Om vi skriver den första basen som en radvektor $E = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2)$ (fast det är ingen radvektor, utan bara ett bekvämt skrivsätt), så kan vi skriva (formellt, vilket betyder att det egentligen inte är ett vettigt uttryck)

$$E' = ES, \quad S = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Explicit:

$$(\vec{e}_1'\ \vec{e}_2') = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2)\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Om vi då skriver $\vec{u} = EX = E'X'$ så ger räkningen ovan att

$$X = SX'.$$

Detta följer av följande formella räkning (identisk med den i exemplet)

$$EX = E'X' = ESX' \Rightarrow X = SX'.$$

Explicit:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}.$$

Genom att invertera matrisen får vi sedan att

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Exempel Betrakta nu basbytet i rummet:

$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 \\ \vec{e}_2' = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3 \\ \vec{e}_3' = 5\vec{e}_1 \qquad\quad - 7\vec{e}_3 \end{cases}.$$

(Visa själv att de nya vektorerna verkligen är linjärt oberoende!) I beteckningarna ovan har vi $E' = ES$ med

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

Resonemanget ovan visar därför att koordinatbytet ges av

$$\begin{cases} x_1 = x_1' + 2x_2' + 5x_3' \\ x_2 = -2x_1' + 3x_2' \\ x_3 = -4x_2' - 7x_3' \end{cases}.$$

Vill vi ha X' uttryckt i X istället, inverterar vi matrisen.

Notera

- basbytesmatrisen S har som kolonnvektorer de nya baselementen (uttryckta i koordinater relativt de gamla)
- om $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ är en ON-bas så blir den nya basen en ON-bas om och endast om basbytesmatrisen är en ortogonal matris

Exempel Rotation i planet vinkeln θ moturs svarar mot basbytet $E' = ES$ (E är en given ON-bas) där

$$S = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Det betyder att de nya koordinaterna fås ur de gamla genom $X = SX'$, dvs $X' = S^{-1}X$. Men eftersom S är en ortogonal matris gäller att $S^{-1} = S^T$ och alltså

$$\begin{cases} x_1' = \cos\theta x_1 + \sin\theta x_2 \\ x_2' = -\sin\theta x_1 + \cos\theta x_2 \end{cases}.$$

Egenarbete

Gör uppgifterna **7.18, 7.19, 7.21**.

Basbyten vid linjära avbildningar

Vi vet att en linjär avbildning $F : R^n \to R^m$ kan skrivas $F(x) = Ax$ för en avbildningsmatris av typ $m \times n$. Ofta vill vi betrakta F som en linjär avbildning från ett vektorrum till ett annat och den blir då av denna typ först efter att vi valt en bas både i definitionsrummet och i värderummet. Så A beror på vilka baser vi arbetar i. Den kan därför vara enklare eller svårare att förstå beroende av hur vi väljer denna bas.

Om vi startar i en E-bas och har avbildningsmatrisen A i den, och sedan inför en E'-bas så att koordinatbytet blir $X = SX'$, så ser vi att

$$Y = AX \Leftrightarrow SY' = ASX' \Leftrightarrow Y' = S^{-1}ASX'$$

vilket betyder att i den nya basen har vi avbildningsmatrisen

$$A' = S^{-1}AS.$$

Exempel Vi såg föregående gång att om vi inför en ON-bas i rummet och betraktar speglingen i planet $\pi : x_1 - x_2 - x_3 = 0$ så blir avbildningsmatrisen

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi ska nu se hur denna avbildningsmatris ser ut om vi istället väljer en bas som har två element i π och det tredje som en normal till π.

Vi måste då först bestämma en bas för π, vilket vi gör genom att sätta $y = s$ och $z = t$. Vi har då att

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En ny bas blir därför $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(1, -1, -1)$ och basbytesmatrisen ges av

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

I den nya basen blir vår linjära avbildning därför

$$A' = S^{-1}AS = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tänk efter vad detta betyder geometriskt!

Vi ser att om vi väljer vår bas lämpligt är det lättare att förstå vad en linjär avbildning betyder. I det här fallet, om vi hade A given och skulle förstå vad den beskriver, så ser vi att i den den primmade basen är den en spegling i $x_1'x_2'$-planet.

Problemet är naturligtvis att det är inte självklart hur vi ska välja vår bas för att få en behändig form på avbildningsmatrisen. Eller?

Anmärkning Det beräkningsmässigt jobbiga steget i exemplet var nog att beräkna S^{-1} (vilket därför hoppades över). Man kan slippa det steget genom att välja en ON-bas, eftersom då vet vi att $S^{-1} = S^T$. Ofta kan det vara mer arbete, men i det här fallet är det enkelt: vi vet att $(1, 1, 0)$ och $(1, -1, -1)$ är ortogonala. Normera dem och tag deras vektorprodukt som den sista basvektorn, alltså

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Den är en ortogonal matris. Priset är att vi måste dras med några irrationella tal i räkningarna.

Egenarbete

Gör **8.26**.

Sammansättning av linjära avbildningar

Följande exempel ska visa på följande två påståenden:

- Sammansättning av två linjära avbildningar är också en linjär avbildning
- Motsvarande avbildningsmatris är produkten av de två ingående funktionernas avbildningsmatriser.

Exemplet ska också klargöra *hur* matrismultiplikationen ska utföras.

Exempel Betrakta följande två avbildningar

- P som innebär att vi först speglar i planet $\pi : x - y - z = 0$ och sedan i yz-planet
- Q som innebär att vi först speglar i yz-planet och sedan i planet $\pi : x - y - z = 0$.

Vi har redan använt att spegling i planet π har avbildningsmatrisen

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

och vi inser lätt att spegling i yz-planet har avbildningsmatrisen

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Om $F(x)$ är spegling av punkten x i planet π så gäller alltså att $F(x) = Ax$, och om $G(x)$ är spegling av punkten x i yz-planet, så gäller att $G(x) = Bx$.

Vi ser därför att

$$P(x) = G(F(x)) = G(Ax) = B(Ax) = (BA)x,$$

men att

$$Q(x) = F(G(x)) = F(Bx) = A(Bx) = (AB)x.$$

Vi ser att P får avbildningsmatrisen

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

medan Q får avbildningsmatrisen

$$AB = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Notera att ordningen spelar roll!

Egenarbete

Gör **8.20**.

Avbildningsmatris till den inversa avbildningen

En funktion F har en invers om ekvationen $F(x) = y$ har en entydig lösning x för varje y. Då skriver vi $x = F^{-1}(y)$ och funktionen F^{-1} kallas en invers funktionen.

Om F är linjär så gäller att ekvationen blir $Ax = y \Leftrightarrow x = A^{-1}y$, vilket betyder att den inversa funktionen har avbildningsmatris A^{-1}.

Exempel Projektionen (av punkter i rummet) på ett plan definierar en funktion som inte är inverterbar. Varför?

Spegling i ett plan definierar däremot en funktion sådan att $F^{-1} = F$ (den är sin egen invers). Varför?

Egenarbete

Gör **8.25**.

Determinanter och linjära avbildningar

Om vi har en linjär avbildning $F : R^n \to R^n$, så avbildas en parallellepiped på en ny parallellepiped. Hur förändras dess volym (area i planet) vid avbildningen?

Om vi skriver $F(x) = Ax$ så vet vi att om $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}$ är en ON-bas i R^n så avbildas motsvarande (hyper-)enhetskub på den parallellepiped som spänns upp av vektorerna $A_1, \ldots, A_n$, och dess volym (med tecken) är $\det A$. Så volymen ändras med faktorn $|\det A|$.

Men om vi istället utgår ifrån en annan parallellepiped som genereras av vektorerna $B_1, \ldots, B_n$, så kan vi se det som att den är bilden av enhetskuben genom en funktion $G(x) = Bx$ som alltså har en volym som är $\det B$ gånger större än enhetskubens. Men bilden av denna parallellepiped blir ju bilden av enhetskuben genom den linjära avbildning som har avbildningsmatris AB, och alltså skalfaktorn $|\det AB| = |\det A||\det B|$.

BILD

Sammanfattningsvis: volymer av parallellepipeder ändras med $|\det A|$.

Denna observation är viktig i flerdimensionell analys eftersom den ingår då man gör variabelbyte i dubbel- och trippelintegraler!