Föreläsning 7

Innehåll: Linjära avbildningar

Kapitel 8.1-8.3, 9.7

Efter dagens föreläsning måste du

- veta vad det innebär för en funktion att vara linjär och hur sådana kan beskrivas med hjälp av matriser
- känna till olika sätt att hitta avbildningsmatrisen till en linjär avbildning
- kunna förklara varför avbildningsmatrisen är ortogonal precis då avbildningen är en isometri

Linjära avbildningar

An $m \times n$-matris A definierar en funktion $F : R^n \to R^m$ genom

- Tag en vektor $(x_1, \dots, x_n) \in R^n$ och skriv den som en kolonnvektor $X = x^T$.
- Multiplicera med A för att få en kolonnvektor $Y = AX$
- Definiera nu $F(x) = Y^T = (y_1, \dots, y_m)$.

Denna funktion är linjär, vilket betyder att den har följande egenskaper:

$$F(x + x') = F(x) + F(x'), \qquad F(\lambda x) = \lambda F(x).$$

BILD

Exempel Antag att $F(2, 1) = (-1, 2)$ och $F(3, 4) = (4, 1)$ och att F är linjär. Eftersom $(-5, 0) = (3, 4) - 4(2, 1)$ kan vi då beräkna

$$F(-5, 0) = F(3, 4) - 4F(2, 1) = (4, 1) - 4(-1, 2) = (8, -7).$$

Ur det kan vi sedan dra slutsatsen att

$$F(1, 0) = -\frac{1}{5}F(-5, 0) = (-\frac{8}{5}, \frac{7}{5}).$$

På samma sätt är $(0, -5) = 3(2, 1) - 2(3, 4)$ och vi får att $F(0, 1) = (\frac{11}{5}, -\frac{4}{5})$.

En linjär avbildning kan alltid skrivas som en matrismultiplikation: om vi skriver $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ så gäller att

$$F(x) = x_1F(e_1) + \ldots + x_nF(e_n) = AX,\ A = (F(e_1) \ldots F(e_n)),\ X = x^T.$$

Kolonnerna i matrisen A ges alltså av de vektorer i R^m som baselementen i R^n avbildas på. Matrisen kallas F:s avbildningsmatris.

Exempel I exemplet ovan är avbildningsmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{8}{5} & \frac{11}{5} \\ \frac{7}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -8 & 11 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}.$$

Anmärkning En linjär avbildning måste vara sådan att $F(0) = 0$!

Vi påminner oss att definitionsmängden D_F för en avbildning är de x för vilken den är definierad och värdemängden V_F är de värden som F antar. Normalt sätt är $D_F = R^n$ för en linjär avbildning och blir V_F de vektorer som kan fås som linjärkombinationer av kolonnerna i avbildningsmatrisen A, alltså $V(A)$.

Anmärkning Kanske har vi inte R^n och R^m från början utan ett mer abstrakt rum. Då måste vi först välja baser i både definitionsrum och värderum för att skriva vektorerna i koordinater. En avbildningsmatris är då alltid med avseende på dessa baser och ändras när vi ändrar bas. Vi ska återkomma till det.

Egenarbete

Uppgifterna **8.9, 8.10, 8.12** illusterar vad det innebär att en avbildning är linjär.

Lös sedan uppgifterna **8.1-8.3, 8.5**.

Exempel på linjära avbildningar

Exempel Att rotera plana geometriska vektorer vinkeln θ moturs är en linjär avbildning (om man roterar en summa av två vektorer får man samma resultat om man först roterar vektorerna och sedan tar summan och det spelar ingen roll om man multiplicerar med ett tal före eller efter rotationen).

Om vi inför en ortonormerad bas e_1, e_2 så att vi får vårt "vanliga" koordinatsystem, så har vi att

$$\begin{cases} F(e_1) = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2, \\ F(e_2) = \cos(\theta + \frac{\pi}{2})e_1 + \sin(\theta + \frac{\pi}{2})e_2 = -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2 \end{cases}.$$

Det betyder att avbildningsmatrisen för denna avbildning i denna bas (samma bas i värderummet) ges av

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Anmärkning Om vi istället ser planet som det komplexa talplanet så gäller att denna avbildning svarar mot multiplikation med $e^{i\theta}$. Men det ger samma resultat: om vi skriver $z = x_1 + ix_2$ och $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ så blir resultatet

$$e^{iz}z = (\cos\theta + i\sin\theta)(x_1 + ix_2) = x_1\cos\theta - x_2\sin\theta + i(x_1\sin\theta + x_2\cos\theta)$$

och skriver vi detta som $y_1 + iy_2$ så har vi att

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Samma som ovan!

Att se vad basvektorer avbildas på är ett sätt att bestämma avbildningsmatrisen. Alternativt kan man se vad en allmän punkt (vektor) avbildas på. Notera att med ett givet origo behöver vi inte skilja på punkt och vektor.

Exempel Att projicera en punkt i rummet längs en vektor (i något lämpligt koordinatsystem) $\vec{v} = (3, 1, -1)$ på planet $\pi : x - 2y + 3z = 0$ definierar en funktion. Vi ska bestämma den.

Innan vi gör det, börja med det enklare(?) problemet: på vilken punkt avbildas punkten $(3, 3, 3)$?

Det vi måste inse nu är att lösningen är den punkt som är skärningen mellan linjen $(x, y, z) = (3, 3, 3) + t(3, 1, -1) = (3 + 3t, 3 + t, 3 - t)$ och planet π. Varför?

Skärningen fås genom att vi bestämmer det t som uppfyller $(3 + 3t) - 2(3 + t) + 3(3 - t) = 0$, vilket är $t = 3$. Motsvarande punkt är då $(12, 6, 0)$.

För att nu bestämma funktionen ersätter vi nu $(3, 3, 3)$ med en godtycklig punkt (x_1, x_2, x_3), men gör precis likadant som ovan. Linjen blir $(x, y, z) = (x_1 + 3t, x_2 + t, x_3 - t)$ och det t som ger skärningspunkten blir

$$t = x_1 - 2x_2 + 2x_3.$$

Detta betyder att slutpunkten blir

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) + (x_1 - 2x_2 + 2x_3)(3, 1, -1) =$$

$$(4x_1 - 6x_2 + 6x_3, x_1 - x_2 + 2x_3, -x_1 + 2x_2 - x_3).$$

På matrisform kan vi skriva detta $F(x) = Ax$ (där jag låter x i högerledet vara en kolonnvektor vid beräkningen av produkten) där

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vi ser att F är en linjär avbildning och A dess avbildningsmatris.

Anmärkning Vad är $V(A)$ och $N(A)$ i detta exempel? Kontrollera att dimensionssatsen gäller!

Exempel Bestäm avbildningsmatrisen för den funktion som beskriver ortogonal projektion på planet $\pi : x - y - z = 0$ (i en ortonormerad bas).

Alternativ 1: Gör som i förra exemplet: en normal till π är $\vec{n} = (1, -1, -1)$, så det är längs den vi ska projicera. Linjen (se förra exemplet) blir $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3) + t(1, -1, -1)$ och skärningen ger $t = -(x_1 - x_2 - x_3)/3$ och vi får allså att

$$F(x) = (x_1, x_2, x_3) - \frac{1}{3}(x_1 - x_2 - x_3)(1, -1, -1) = \ldots =$$

$$(\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3, \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3, \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3).$$

Vi ser att det är en linjär avbildning med avbildningsmatris

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alternativ 2: Det är egentligen endast i början detta steg skiljer sig. En enhetsnorml till planet ges av $\vec{n} = (1, -1, -1)/\sqrt{3}$ och enligt projektionsformeln gäller därför att projektionen av *vektorn* $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)$ på normalen till planet genom origo är vektorn $\vec{u}' = (\vec{u} \cdot \vec{n})\vec{n} = \frac{1}{3}(x_1 - x_2 - x_3)(1, -1, -1)$. Motsatt riktning med denna från punkten ger oss den ortogonala projektionen:

$$\vec{u} - \vec{u}' = (x_1, x_2, x_3) - \frac{1}{3}(x_1 - x_2 - x_3)(1, -1, -1),$$

vilket är samma uttryck som dyker upp ovan. Fortsättningen är densamma.

Alternativ 3: Ett tredje alternativ är att göra som vi gjorde för rotationen ovan, nämligen att se efter vad de tre basvektorerna $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ avbildas på. Det innebär att göra räkningarna ovan tre gånger med olika punkter och vi får att

$$F(e_1) = \frac{1}{3}(1, 2, 2), \quad F(e_1) = \frac{1}{3}(2, 1, -2), \quad F(e_1) = \frac{1}{3}(2, -2, 1).$$

Vi kan sedan skriva upp avbildningsmatrisen med dessa som kolonner.

Anmärkning Vad är $V(A)$ och $N(A)$ i detta exempel? Kontrollera att dimensionssatsen gäller!

Exempel Vi ska nu bestämma den funktion $G(x)$ som beskriver spegling i planet $\pi : x - y - z = 0$.

Spegling startar med ortogonal projektion, men man fortsätter lika långt på andra sidan. Vi kan därför utnyttja räkningarna ovan och får att

$$G(x) = \vec{u} - 2\vec{u}' = (x_1, x_2, x_3) - 2\frac{1}{3}(x_1 - x_2 - x_3)(1, -1, -1)$$

och lite räknande visar att $G(x) = Bx$ där

$$B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exempel Ange den funktion $H(x)$ som beskriver ortogonal projektion på planet $\pi : x - y - z = 1$.

Det som skiljer detta exempel är att planet nu inte går genom origo! Räknar vi som ovan (gör det!!!) ser vi att

$$H(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Detta är *inte* en linjär avbildning, vilket man ser t.ex. av att $H(0, 0, 0) = \frac{1}{3}(1, -1, -1)$; om avbildningen var linjär skulle detta vara noll. Man säger att $H(x) = b + Ax$ där $b \neq 0$ är en affint linjär avbildning, och en sådan kan bli linjär genom att vi väljer ett nytt origo. I vårt fall någon punkt i planet.

Egenarbete

Lös uppgifterna **8.13, 8.14**.

Isometriska avbildningar

En linjär avbildning $F : R^n \to R^n$ sägs vara isometrisk om

$$|F(\vec{u})| = |\vec{u}|$$

för alla vektorer $\vec{u}$.

Anmärkning En isometrisk avbildning “bevarar avstånd” eftersom

$$|F(x_1) - F(x_2)| = |F(x_1 - x_2)| = |x_1 - x_2|.$$

Man inser att rotationer och speglingar i plan (som går genom origo) är isometriska avbildningar, medan projektion på ett plan inte är det.

Vad innebär det för avbildningsmatrisen A att F är isometrisk? Vi har att

$$|x|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2 = (x_1 \ldots x_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x^T x$$

där vi ser x som en kolonnvektor (det vi brukat kalla X förut). Ur det följer att

$$|F(x)|^2 = |Ax|^2 = (Ax)^T(Ax) = x^T(A^T A)x.$$

Isometrivillkoret innebär nu att $x^T(A^T A)x = x^T x$. Den enda *symmetriska* matris B som uppfyller $x^T Bx = x^T x$ för alla x är identitetsmatrisen (lämnas som ointressant övning) och eftersom $A^T A$ är symmetrisk följer att $A^T A = I$ och alltså att A är en ortogonal matris.

Med andra ord: en linjär avbildning $F : R^n \to R^n$ är en isometri precis då dess avbildningsmatris A är en ortogonal matris.

Exempel Vi ser att både avbildningsmatrisen för rotationen i planet och för speglingen i ett plan ovan är ortogonala matriser. Kontrollera!