Föreläsning 6

Linjär algebra (FMA420)
Anders Källén

Innehåll: Vektorprodukt och determinanter

Kapitel 5.1-5.4, 9.1-9.3

Efter dagens föreläsning måste du

- Kunna definiera och räkna ut vektorprodukten av två vektorer i rummet
- Beräkna volymprodukten och veta vad en 3×3-determinant är
- Kunna de viktigaste reglerna för räkning med determinant

Arean av ett parallellogram

Vad är arean av parallellogrammet nedan (ON-bas)?
BILD

Arean är höjden gånger basen, alltså $A = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$. För att beräkna det påminner vi oss först att, med $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$,

$$|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta = \vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Kvadrera och räkna lite:

$$A^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2(1 - \cos^2\theta) = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 =$$

$$(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) - (x_1x_2 + y_1y_2)^2 = x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2$$

$$= (x_1y_2 - y_1x_2)^2.$$

Det betyder att

$$A = \pm(x_1y_2 - y_1x_2)$$

där tecknet ska väljas så att uttrycket blir positivt.

Vi ska föra över detta på ett matrisspråk, genom att införa en matris som består av vektorerna som kolonnvektorer. Det blir dock bättre om vi använder lite andra beteckningar, så vi börjar med

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Då gäller att arean av det parallellogram som definieras av kolonnvektorerna (så att $(a_{11}, a_{21}) = (x_1, y_1)$ och $(a_{12}, a_{22}) = (x_2, y_2)$) ges av $\pm$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Uttrycket till vänster kallas *determinanten av matrisen A* och har alltså tolkningen att den ger arean av parallellogrammet *med tecken*. Betecknas $\det A$.

Exempel Bestäm arean för triangeln som har hörn i punkterna $P_0 = (1,3), P_1 = (4,1), P_2 = (2,2)$.

Denna area är hälften av arean av det parallellogram som spänns upp av $\overrightarrow{P_0P_1} = (4,1) - (1,3) = (3,-2)$ och $\overrightarrow{P_0P_1} = (2,2) - (1,3) = (1,-1)$. Räknat med tecken har detta parallellogram arean

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 3(-1) - 1(-2) = -1.$$

Arean av parallellogrammet är alltså $|-1| = 1$ och triangelns area därför $1/2$.

Men arean är noll precis om det inte blir ett parallellogram, dvs om kolonnvektorerna är linjärt beroende. Med andra ord (A är en 2×2-matris)

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow A\text{:s kolonnvektorer är linjärt oberoende.}$$

Men då följer också att

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ är inverterbar.}$$

En annan observation värd att göra är att

$$\det A^T = \det A$$

så om man sätter vektorerna som rader eller kolonner spelar ingen roll.

Egenarbete

Beräkna 2×2-determinanterna i **9.1**ab. Gör sedan **9.5**.

Vektorprodukten av två vektorer

Två vektorer i rummet spänner också upp ett parallellogram. Vad kan vi säga om dess area? Delar av ovanstående gäller ännu, så till vida att den ges av $|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$. Hur ska vi räkna ut den? Om vi genomför räkningarna ovan får vi ett till synes komplicerat uttryck. Vi splittrar upp resonemanget i några steg för att genomskåda det.

Två icke-parallella vektorer $\vec{u}$ och $\vec{v}$ i rummet spänner upp ett plan. Till detta plan kan vi välja två normaler som har en längd som är lika stor som arean av det parallellogram de spänner upp i planet (tänk igenom!). För att välja en av dessa, så att två vektorer i rummet på ett entydigt sätt definierar en tredje vektor enligt detta, så tar vi den vektor $\vec{w}$ som är sådan att trippeln $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ bildar ett positivt orienterat system . Den härigenom definierade vektorn kallar vi *vektorprodukten* av $\vec{u}$ och $\vec{v}$ och vi betecknar den $\vec{u} \times \vec{v}$.

Anmärkning Vektorprodukten är en väldigt tredimensionell storhet. Det finns ingen vektorprodukt i planet eller i några andra dimensioner (nästan).

Anmärkning Vektorerna $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ är positivt orienterade om det är så att den minsta vridning som överför $\vec{u}$ på $\vec{v}$ (samma riktning) sker moturs *sett från spetsen av* $\vec{w}$.

Följande karakteriserar nu vektorprodukten:

1. $\vec{u} \times \vec{v}$ är vinkelrät mot både $\vec{u}$ och $\vec{v}$,
2. $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$
3. $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}$ utgör ett positivt orienterat system (obs ordningen)

Anmärkning Egentligen har vi först bara definierat vektorprodukten för icke-parallella vektorer, men om vi sätter den till 0 när vektorerna är parallella, så fungerar definitionen även då.

Räknelagar och koordinatframställning

Följande räkneregler gäller för vektorprodukten:

1. $\vec{u} \times \vec{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u}, \vec{v}$ är parallella,
2. $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
3. $(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \times \vec{v} = \vec{u}_1 \times \vec{v} + \vec{u}_1 \times \vec{v}$
4. en motsvarande i det andra argumentet
5. $(\lambda\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{v} \times (\lambda\vec{u}) = \lambda\vec{u} \times \vec{v}$

Den enda av dessa räkneregler som inte är självklar från beskrivningen ovan är den tredje (den fjärde följer sedan ur den tredje och den andra tillsammans). Läs själva i boken.

Exempel En ortonormerad bas är positivt orienterad om

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_3,\ \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_2,\ \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_1.$$

(Kan du hitta symmetrin?) Notera speciellt att

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = 0.$$

Antag nu att vi har givet en positivt orienterad, ortonormerad bas. Då kan vi skriva

$$\vec{u} \times \vec{v} = (x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) \times (y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3) =$$

$$x_1y_1\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 + x_2y_2\vec{e}_2 \times \vec{e}_2 + x_3y_3\vec{e}_3 \times \vec{e}_3 + x_1y_2\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + x_1y_3\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 +$$

$$x_2y_3\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 + x_2y_1\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 + x_3y_1\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 + x_3y_2\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 =$$

$$0 + 0 + 0 + x_1y_2\vec{e}_3 + x_1y_3(-\vec{e}_2) + x_2y_3(-\vec{e}_1) + x_2y_1\vec{e}_3 + x_3y_1\vec{e}_2 + x_3y_2(-\vec{e}_1)$$

$$(x_2y_3 - x_3y_2)\vec{e}_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\vec{e}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{e}_3.$$

Med andra ord

$$(x_1, x_2, x_3) \times (y_1, y_2, y_3) = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1).$$

En minnesregel för detta är att se det som determinanter, dvs vektorprodukten är

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3.$$

Observera minustecknet! Även denna minnesregel kan verka lite konstig, men ha tålamod.

Exempel Beräkna arean av triangeln med hörn i $P_0 = (3, 0, 1)$, $P_1 = (5, 3, 0)$, $P_2 = (7, 1, -2)$.

Vi vet att triangelns area är hälften av arean av det parallellogram som spänns upp av vektorerna $\overrightarrow{P_0P_1} = (5, 3, 0) - (3, 0, 1) = (2, 3, -1)$ och $\overrightarrow{P_0P_2} = (7, 1, -2) - (3, 0, 1) = (4, 1, -3)$. För att få arean av parallogrammet beräknar vi längden på vektorprodukten av dessa två vektorer:

$$|(2, 3, -1) \times (4, 1, -3)| = |(-8, 2, -10)| = \sqrt{168} = 2\sqrt{42}.$$

Eftersom triangelarean är hälften av detta är svaret $\sqrt{42}$.

Egenarbete

Bekanta dig med vektorprodukten genom att räkna uppgifterna **5.1, 5.2, 5.4, 5.7**.

Volymprodukten

Antag nu att vi tar en vektor $\vec{w} = z_1\vec{e}_1 + z_2\vec{e}_2 + z_3\vec{e}_3$ och multiplicerar vektorprodukten skalärt med den. Då får vi

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} z_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} z_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} z_3.$$

Men trippelprodukten har en tolkning: Om vi skriver $\vec{w} = \vec{w}' + \vec{w}''$ där $\vec{w}'$ är parallell med $\vec{u} \times \vec{v}$ och $\vec{w}''$ är ortogonal mot den, så gäller att

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}' = \pm|\vec{u} \times \vec{v}||\vec{w}'| = \pm\text{basarea} \cdot \text{ höjd}$$

av den parallellepiped som bestäms av vektorerna $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. Uttrycket är därför volymen av denna parallellepiped, räknat med tecken. Uttrycket blir positivt när $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ är positivt orienterade, annars negativt. Ur det följer också att (tänk efter!!!)

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}).$$

Determinanter

Vi inför nu *determinanten* av matrisen A som

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = A_1 \cdot (A_2 \times A_3).$$

Det finns en minnesregel för hur den beräknas (se boken), men det är lika enkelt att använda resonemanget ovan till att få följande rekursiva formel:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Detta kallas utveckling efter första kolonnen och reducerar en 3×3-determinant till 3 stycken 2×2-determinanter.

Exempel Bestäm en ekvation för planet π som innehåller vektorerna $\vec{u}_1 = (1, 2, -1)$, $\vec{u}_1 = (0, 3, 4)$ samt punkten $P_0 = (1, 1, 8)$ (vi förutsätter ett postitivt orienterat ON-system).

Observationen vi ska göra är att en punkt $P = (x, y, z)$ ligger i planet π om och endast om vektorerna $\overrightarrow{P_0P} = (x - 1, y - 1, z - 3), \vec{u}_1, \vec{u}_2$ är linjärt beroende, vilket de är precis då

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y-1 & 2 & 3 \\ z-3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (x-1) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - (y-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + (z-3) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 11x - 4y + 3z - 16 = 0.$$

Normalformen för π är alltså $11x - 4y + 3z - 16 = 0$.

Exempel Beräkna volymen av den tetraeder som har hörn i $P_0 = (0, 0, 0)$, $P_1 = (1, 0, -1)$, $P_2 = (2, 1, 0)$, $P_3 = (1, 1, 2)$.

Vi har att

$$\text{Volymen av en tetraeder} = \frac{1}{3}\text{basarea} \cdot \text{höjd} = \frac{1}{6}\text{volymen av parallellepiped}$$

Volymen av motsvarande parallellepiped ges enligt ovan av

$$\det(\overrightarrow{P_0P_1}\ \overrightarrow{P_0P_2}\ \overrightarrow{P_0P_3}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

varur det följer att tetraederns volym är $1/6$.

Tolkningen av determinanten är alltså som volymen med tecken av det parallellepiped som spänns upp kolonnvektorerna i motsvarande matris. Tecknet är positivt om dessa är positivt orienterade, annars negativt. Detta betyder att vi ser att följande räkneregel gäller:

$$\det(A_1\ A_2\ A_3) = -\det(A_2\ A_1\ A_3).$$

Varför? Kan du tänka ut några andra, liknande räkneregler? Vad sägs om

$$\det(A_1 + A_1'\ A_2\ A_3) = \det(A_1\ A_2\ A_3) + \det(A_1'\ A_2\ A_3)?$$

Men nu är följande påstående självklart för 3×3-determinanter också:

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ är inverterbar}$$

eftersom determinanten är noll precis då A:s kolonnvektorer är linjärt beroende,.

Egenarbete

Gör **9.1cde, 9.3, 9.4, 9.6**.

Några viktiga räknelagar för determinanten

Följande två formler gäller:

$$\det A^T = \det A$$

och

$$\det AB = \det A \det B.$$

Med ren råräkning kan man visa att dessa formler måste gälla både för 2×2 och 3×3-matriser, men vi gör inte det, eftersom ett intressant bevis måste gå att generalisera till alla dimensioner. Den intresserade kan läsa i boken.

Dessa räkneregler får några direkta konsekvenser:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A},$$

och att $\det A = \pm 1$ om A är en ortogonal matris. Bevisen lämnas som övning.

Vi har sett att vi kan utveckla en 3×3-matris efter första kolonn. Eftersom $\det A^T = \det A$ kan vi lika gärna utveckla efter första rad. Vidare har vi sett att om vi byter plats på två kolonner så får vi bara ett teckenbyte av determinanten. Slutsat: vi kan utveckla efter en valfri rad eller kolonn bara vi håller reda på tecknet (se boken sidan 205).

Egenarbete

Gör **9.10, 9.11, 9.12**.