Föreläsning 5

Linjär algebra (FMA420)
Anders Källén

Innehåll: Skalärprodukt i plan och rum

Kapitel 4, 6.4

Efter dagens föreläsning måste du

- veta vad en skalärprodukt är, även i R^n
- veta vad som menas med en ortonormerad bas
- förstå vilken den geometriska tolkningen av den är (i plan och rum)
- kunna använda den för att beskriva plan i rummet.
- vet hur man räknar kortaste avstånd från en punkt till en linje eller ett plan

Skalärprodukten av två geometriska vektorer

Skalärprodukt = produkt som ger en skalär (dvs ett tal!)

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |u||v|\cos\theta.$$

Geometrisk tolkning: Låt $\vec{v} = \vec{e}$ vara en enhetsvektor (dvs $|\vec{e}| = 1$). Låt L vara den räta linjen genom origo som har riktningsvektor e och låt $\vec{u}'$ vara den ortogonala projektionen av $\vec{u}$ på L:

BILD

Då gäller att

$$\vec{u}' = (|\vec{u}|\cos\theta)\vec{e} = (\vec{u}\cdot\vec{e})\vec{e}.$$

Tolkning i fysiken: kraften i rörelsens riktning gånger sträcka = arbete.

Anmärkning ortogonal = vinkelrät!

Vi säger att vå vektorer är ortogonala om $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ och skriver $\vec{u}\perp\vec{v}$.

Räkneregler för skalärprodukt:

- $\vec{u}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|^2$
- $(\vec{u}_1+\vec{u}_2)\cdot\vec{v} = \vec{u}_1\cdot\vec{v}+\vec{u}_2\cdot\vec{v}$
- $(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}(\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$.

Den första och tredje formeln är lätt bevisade från definitionen. Den andra kräver att man tänker på skalärprodukten som direkt härledd ur $\vec{u}$ geometriskt (se boken).

Exempel Låt $|\vec{u}| = 3, |\vec{v}| = 4, \theta = \pi/6$. Bestäm $|\vec{u}+\vec{v}|$!

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v} =$$

$$|\vec{u}|^2+2(\vec{u}\cdot\vec{v})+|\vec{v}|^2 = 3^2+2\cdot3\cdot4\cos\frac{\pi}{6}+4^2 = 25+12\sqrt{3},$$

så vi får alltå att $|\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{25+12\sqrt{3}}$.

Egenarbete

Gör uppgift **4.1, 4.10** för att konsolidera vad en skalärprodukt är. Notera speciellt att resultatet alltid är ett tal! Gör sedan **4.22a**. Den handlar om $\vec{u}'$ ovan.

Ortonormerade baser

En bas $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$ sägs vara en ortonormerad bas (ON-bas) om

- alla vektorerna är normerade så att de har längden 1
- alla vektorerna är parvis ortogonala, dvs $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = 0,\ j\neq i$.

I en ON-bas blir skalärprodukten enkel att räkna ut: om $\vec{u} = \sum_i x_i\vec{e}_i$ och $\vec{v} = \sum_i y_i\vec{e}_i$ så gäller att

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (x_1\vec{e}_1+\ldots+x_n\vec{e}_n)\cdot(y_1\vec{e}_1+\ldots+y_n\vec{e}_n)$$

består dels av n termer på formen $x_iy_i\vec{e}_i\cdot\vec{e}_i = x_iy_i|\vec{e}_i|^2 = x_iy_i$, dels av ett antal termer på formen $x_iy_j\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = x_iy_j\cdot 0 = 0$. Vi ser alltså att

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = x_1y_1+\ldots+x_ny_n.$$

På samma sätt definierar vi skalärprodukten i R^n:

$$(x_1,\ldots,x_n)\cdot(y_1,\ldots,y_n) = x_1y_1+\ldots+x_ny_n.$$

Exempel

$$(1,2,-1,0,-1)\cdot(3,1,3,4,2) = 1\cdot3+2\cdot1+(-1)\cdot3+0\cdot4+(-1)\cdot2 = 0.$$

Det betyder att vektorerna är ortogonala.

Exempel I en ortonormerad bas gäller att $|\vec{u}| = \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$. Vidare, om $x,y\in R^n$ är ortogonala gäller att

$$|x+y|^2 = |x|^2+|y|^2.$$

Ett ortonormerat koordinatsystem är ett där basvektorerna utgör en ortonormerad bas.

Egenarbete

Gör uppgifterna **4.15, 4.16**.

Ortogonala matriser

Vi kan uttrycka matrismultiplikation så att $(AB)_{jk}$ fås genom att vi multiplicerar den j:te raden i A skalärt med den k:te kolonnen i B. Speciellt betyder det att

$$A^TA = \begin{pmatrix} A_1\cdot A_1 & A_1\cdot A_2 & \ldots A & A_1\cdot A_2 \\ A_2\cdot A_1 & A_2\cdot A_2 & \ldots & A_2\cdot A_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_n\cdot A_1 & A_n\cdot A_2 & \ldots & A_n\cdot A_n \end{pmatrix}.$$

En ortogonal matris är en matris i vilken kolonnvektorerna utgör en ortonormerad bas. Enligt vad vi just sett betyder det att $A^TA = I$. Vi ska se att det medför att $AA^T = I$, och det betyder att $A^{-1} = A^T$ samt att även A^T är ortogonal. Annorlunda uttryckt: utgör kolonnvektorerna en ON-bas, så gör även raderna det (och vice versa).

Exempel Matrisen

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

är ortogonal (kontrollera), så dess invers ges av

$$A^{-1} = A^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Det återstår att visa att om $AB = I$ för två kvadratiska matriser, så är även $BA = I$. Detta kommer sig av att om $AB = I$ så är systemet $AX = Y$ lösbart för alla Y; vi tar bara $X = BY$. Men samtidigt gäller att systemet $BX = 0$ endast har lösningen $X = 0$, vilket betyder att systemet $BY = X$ är entydigt lösbart för alla X (nu är det Y vi söker). Men då är B inverterbar och dess invers är lika med A.

Egenarbete

Gör uppgifterna **7.14, 7.15**.

Geometriska tillämpningar av skalärprodukten

I det här avsnittet beskrivs alla punkter med sina koordinater i ett ON-system.

Planets normalform

Vi har tidigare sett att ett plan i rummet kan skrivas

$$\pi : \quad Ax + By + CZ + D = 0.$$

Om vi tar en punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i π, som alltså uppfyller $Ax_0 + By_+Cz_0 + D = 0$, så ser vi att (x, y, z) ligger i π precis då

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Det betyder att vektorn $\vec{u} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ är ortogonal mot vektorn $\vec{n} = (A, B, C)$. Vi kan därför beskriva π som det plan som är vinkelrät mot $\vec{n}$ och går genom punkten P_0. Formen $Ax + By + Cz + D = 0$ kallas därför planets normalform.

Exempel Bestäm en ekvation för det plan π som går genom punkten $P = (2, 1, 2)$ och har normalvektorn $\vec{n} = (-1, 7, 3)$.

Enligt diskussionen ovan ges π av ekvationen

$$(-1, 7, 3) \cdot (x - 2, y - 1, z - 2) = 0 \Leftrightarrow -x + 7y + 3z - 11 = 0.$$

Exempel Bestäm vinkeln mellan planen

$$\pi_1 : \quad 4x + y + z = 0 \quad \text{och} \quad \pi_2 : \quad 2x + 2y - z - 1 = 0.$$

Vi börjar med att observera att vinkeln mellan planen är samma som vinkeln mellan normalerna $\vec{n}_1 = (4, 1, 1)$ och $\vec{n}_2 = (2, 2, -1)$.

För att bestämma vinkeln mellan två vektorer använder vi skalärprodukten. Vi börjar med att räkna ut

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (4, 1, 1) \cdot (2, 2, -1) = 9,$$

$$|\vec{n}_1| = \sqrt{4^2 + 1^2 + 1^2} = 3\sqrt{2}, \quad |\vec{n}_2| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3.$$

Vi får då

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = |\vec{n}_1||\vec{n}_2| \cos\theta \Leftrightarrow 3\sqrt{2} \cdot 3\cos\theta = 9 \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Eftersom vinkeln ska ligga mellan 0 och π följer att $\theta = \pi/4$.

Egenstudier

Gör uppgift **4.18, 4.19**

Ortogonal projektion på linje och plan

Vi ska nu se på några problem som har följande gemensamt. Given en vektor $\vec{u}$ vill vi dela upp den som en summa $\vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}''$ där $\vec{u}' \perp \vec{u}''$ och vektorn $\vec{u}'$ är en ortogonal projektion på något. Det betyder att $\vec{u}'$ ger den punkt som ligger närmast den punkt som ges av vektorn $\vec{u}$ på detta något. Något ska vara antingen en linje eller ett plan här.

Exempel Dela upp vektorn $\vec{u} = (0, -1, 3)$ i komposanter sådana att $\vec{u}'$ är den ortogonala projektionen på linjen genom origo med riktningsvektor $\vec{v} = (2, 1, 1)$.

För att bestämma $\vec{u}'$ går vi tillbaka till den geometriska tolkningen av skalärprodukt. Då ser vi att $\vec{u}' = (\vec{u} \cdot \vec{e})\vec{e}$, där $\vec{e} = \vec{v}/|\vec{v}| = (2, 1, 1)/\sqrt{6}$. Det följer att

$$\vec{u}' = ((0, -1, 3) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, 1))\frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, 1) = \frac{1}{3}(2, 1, 1).$$

Den andra komposanten beräknar vi nu genom subtraktion:

$$\vec{u}'' = \vec{u} - \vec{u}' = (0, -1, 3) - \frac{1}{3}(2, 1, 1) = \frac{1}{3}(-2, -4, 8).$$

Exempel Bestäm (minsta) avstånd från $P = (1, 2, 1)$ till linjen $L : (x, y, z) = (-2, 1, 1) + t(2, -2, 1)$.

Detta är nästan samma problem som föregående: vi behöver bara välja en punkt P_0 på linjen för att föra över problemet på ett vektorproblem av typen ovan. För det tar vi $P_0 = (-2, 1, 1)$, som ska fungera som origo. Sätter vi $\vec{u} = (1, 2, 1) - (-2, 1, 1) = (3, 1, 0)$ ska vi projicera den på den linje genom P_0 (som är origo) som har riktningsvektor $\vec{v} = (2, -2, 1)$. Vi får då p.s.s. som ovan att

$$\vec{u}' = \frac{4}{9}(2, 2, -1).$$

Men det vi söker är längden på vektorn $\vec{u}'' = \vec{u} - \vec{u}'$:

$$|\vec{u} - \vec{u}'| = |(3, 1, 0) - \frac{4}{9}(2, 2, -1)| = |\frac{1}{9}(19, 17, -4)| = \frac{\sqrt{74}}{3}.$$

Detta är därför det sökta avståndet.

Exempel Givet en punkt $P = (2, -3, 1)$ och ett plan $\pi : -3x + 2y - z + 1 = 0$, bestäm den punkt i planet som ligger närmast punkten P samt hur nära den ligger (dvs avståndet från punkten till planet).

Vi börjar med att välja ett origo lämpligt, vilken är en punkt i planet. Vi kan ta vilken som helst, men väljer $P_0 = (0, 0, 1)$. En normalvektor till planet är $(-3, 2, -1)$, och en med längd ett är därför $\vec{n} = (-3, 2, -1)/\sqrt{14}$. Vi beräknar nu den ortogonala projektionen av $\vec{u} = (2, -3, 1) - (0, 0, 1) = (2, -3, 2)$ på linjen med riktningsvektor $\vec{n}$:

$$\vec{u}' = (\vec{u} \cdot \vec{n})\vec{n} = -\frac{6}{7}(-3, 2, -1).$$

För att få projektionen ska vi nu gå **ner** från P enligt $\vec{u}'$:

$$(2, -3, 1) - \vec{u}' = (2, -3, 1) + \frac{6}{7}(-3, 2, -1) = \frac{1}{7}(-4, -9, 1).$$

Detta är alltså den punkt som ligger närmast P i planet. Annorlunda uttryckt, den är den ortogonala projektionen av P på planet π.

Avståndet ifråga är helt enkelt

$$|\vec{u}'| = \frac{6}{7}\sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \frac{6\sqrt{14}}{7} = \frac{12}{\sqrt{14}}.$$

Anmärkning Om vi tittar efter hur avståndet beräknas ovan ser vi att vi kan generalisera till att beräkna avståndet från en punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ till ett plan $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ genom formeln

$$d = |\vec{u} \cdot \vec{n}| = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

som kallas avståndsformeln. Vi gör bara som ovan: nu är $\vec{n} = (A, B, C)/\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ och $\vec{u}$ vektorn från en punkt i planet till P. Tänk ut hur D uppkommer i formeln!

Egenstudier

Gör uppgift **4.23–4.25**.