Föreläsning 4

Linjär algebra (FMA420)
Anders Källén

Innehåll: Matriser och ekvationssystem

Kapitel 7.3-7.5, 7.7

Efter dagens föreläsning måste du

- veta vad transponatet till en matris är
- kunna bestämma rangen av en matris och en bas för dess nollrum
- kunna innebörden av huvudsatsen för kvadratiska matriser
- veta vad en invers matris är och kunna beräkna den genom att lösa ett ekvationssystem

Transponatet av en matris

Transponatet till en matris får man genom att byta raderna mot kolonner. En $m \times n$-matris blir då en $n \times m$-matris. För en kvadratisk matris innebär det spegling i diagonalen.

Exempel Vi har att

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 4 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \\ -1 & 4 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 8 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

Formler:

- $(A^T)^T = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$. (Notera ordningen - jämför med invers nedan).

Följer direkt ur definition, utom möjligen den sista: elementet på plats (j,k) i $(AB)^T$ = elementet på plats (k,j) i AB = (rad k i A)(kolonn j i B) = (rad j i B^T)(kolonn k i A^T).

Egenarbete

Bekanta dig med innebörden av transponering genom att göra **7.4**.

Linjära ekvationssystem och matriser

I F3 lärde vi oss att ett ekvationssystem kan skrivas $AX = Y$, alternativt

$$x_1 A_1 + \ldots + x_n A_n = Y.$$

Här är $A_1, \ldots, A_n$ kolonnvektorerna i A. Från detta ser vi att

1. $AX = Y$ har en lösning precis om Y ligger i det vektorrum som spänns upp av $A_1, \ldots, A_n$. Vi kallar detta rum för *värderummet* $V(A)$ till A.
2. Antalet linjärt oberoende $A_1, \ldots, A_n$ ger dimensionen på $V(A)$ och kallas matrisens rang.
3. Nollrummet $N(A)$ till A (som utgörs av de vektorer X som uppfyller $AX = 0$) har $n - r$ parametrar, vilket betyder att $n - r$ är dess dimension

Vi kan sammanfatta detta i en formel:

$$\dim V(A) + \dim N(A) = n,$$

som kallas dimensionsformeln. Följande exempel illustrerar hur det fungerar.

Exempel Betrakta matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Av skäl som snart ska framgå tittar vi först närmare på $N(A)$, vilket innebär att vi ska lösa ekvationssystemet $AX = 0$. Gausselimination ger att detta blir

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ -x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}.$$

Vi löser detta genom att sätta $x_2 = s$ och $x_5 = t$. Vi får då att $x_4 = -2t,\ x_3 = -2t + t = -t,\ x_1 = 2s - 2t$ Annorlunda uttryckt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De två vektorerna i högerledet är linjärt oberoende och är därför en bas för nollrummet $N(A)$. Vi ser att $\dim N(A) = 2$.

Men det betyder också något annat:

$$(2s - 2t)A_1 + sA_2 - tA_3 - 2tA_4 + tA_5 = 0$$

för alla s, t. Om vi tar $s = 1, t = 0$ får vi speciellt att $2A_1 + A_2 = 0$ och alltså $A_2 = -2A_1$ (vilket vi lätt kunde sett från början), och tar vi $s = 0, t = 1$ får vi att $-2A_1 - A_3 - 2A_4 + A_5 = 0$.

Vi ser alltså att A_2 och A_5 är linjärkombinationer av A_1, A_3, A_4, så från en potentiell bas för $V(A)$ tar vi bort dem. Är de återstående tre linjärt oberoende?

Ja, ty ekvationen $y_1 A_1 + y_2 A_3 + y_3 A_4 = 0$ måste vara en lösning till den ursprungliga ekvationen med $x_1 = y_1, x_2 = 0, x_3 = y_2, x_4 = y_3, x_5 = 0$. Men det betyder att $s = t = 0$ och alltså att $y_1 = y_2 = y_3 = 0$.

En bas för $V(A)$ har alltså tre element, dvs $\dim V(A) = 3$. Det är detsamma som att säga att rangen av A är 3, och vi ser att

$$\dim V(A) + \dim N(A) = 3 + 2 = 5,$$

som dimensionsformeln säger.

Anmärkning En variant av detta är att använda Gauss-eliminationen av systemet $AX = 0$ på följande sätt. Ekvationssystemet är ekvivalent (Gauss-elimination) med systemet $GX = 0$, där

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Utskrivet i form av kolonnvektorer står här

$$x_1 A_1 + \ldots + x_n A_n = 0 \Leftrightarrow x_1 G_1 + \ldots + x_n G_n = 0.$$

Det som gäller då är att en delmängd av kolonnvektorerna $A_1, \ldots, A_n$ är linjärt oberoende precis då samma delmängd av kolonnvektorerna $G_1, \ldots, G_n$ är det. (Tänk efter, eller se boken sidan 145). I vårt fall ser vi att G_1, G_3, G_4 är linjärt oberoende (varför?) men de övriga två är linjärkombinationer av dessa.

Egenarbete

Gör först **7.22**, vilken har en lösning som kan hjälpa dig igenom resonemangen. (Slå upp i boken vad pivotkolonner är för något om du inte ser att rangen är 2.)

När du förstår hur denna uppgift fungerar, lös på motsvarande sätt **7.23acd**.

Huvudsatsen för kvadratiska matriser (början)

Låt A vara en kvadratisk matris. Vi vet att $AX = Y$ är ekvivalent med ekvationssystemet $x_1 A_1 + \ldots + x_n A_n = Y$. Från vad vi vet gäller då att följande tre villkor är ekvivalenta:

- kolonnvektorerna bildar en bas
- $AX = 0$ har endast lösningen $X = 0$
- $AX = Y$ är lösbart för alla Y.

Anmärkning Poängen är väsentligen att vi endast behöver se att kolonnerna i A är linjärt oberoende för att se att ekvationssystemet $AX = Y$ är lösbart för alla Y.

Exempel Hur många lösningar har ekvationssystemet $x_1 - 4x_2 = 0, \quad -3x_1 + 12x_2 = 0$? På matrisform kan det skrivas $AX = 0$ med $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}$, vars kolonnvektorer är proportionella. De bildar därför inte en bas vilket betyder att ekvationen $AX = 0$ har fler lösningar än $X = 0$. Det följer att det finns oändligt många lösningar.

Invers matris

Antag att A är kvadratisk och att ekvationen $AX = Y$ är entydigt lösbar för alla Y. Vi kan då lösa detta genom Gausselimination:

Exempel

$$\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + x_3 = y_1 \\ 3x_2 + 2x_3 = y_2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -5y_1 + 6y_2 - 7y_3 \\ x_2 = -4y_1 + 5y_2 - 6y_3 \\ x_3 = 6y_1 - 7y_2 + 9y_3 \end{cases}.$$

Det vänstra ekvationssystemet kan skrivas $AX = Y$ och det högra $X = BY$ där

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -5 & 6 & -7 \\ -4 & 5 & -6 \\ 6 & -7 & 9 \end{pmatrix}$$

Jag påstår nu att vi måste ha

$$AB = BA = I$$

där I är matrisen med ettor på diagonalen och nollor för övrigt, som har har egenskapen att $AI = IA = A$.

Vi har nämligen att $X = BY$ löser ekvationssystemet, vilket betyder att $Y = AX = A(BY) = (AB)Y$. Detta är sant för alla Y och därför måste $AB = I$. Men vi har också att $Y = AX$ löser ekvationssystemet $BY = X$ vilket betyder att $X = BY = B(AX) = (BA)X$ och det följer att $BA = I$.

Motiverade av exemplet gör vi följande allmänna observation: ekvationssystemet $AX = Y$ är entydigt lösbart för alla Y om och endast om det finns en entydigt bestämd matris B sådan att

$$AX = Y \Leftrightarrow Y = BX.$$

Vi säger då att A är inverterbar och skriver $B = A^{-1}$, som kallas inversen till A.

Alternativt kan vi säga att A är inverterbar om det finns en matris A^{-1}, kallad inversen till A, sådan att

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I.$$

(Här står I för enhetsmatrisen; betecknas ibland E.)

Anmärkning Jämför med den enkla ekvationen $ax = y$ där a, x, y alla är tal. Dess lösning är $x = a^{-1}y = y/a$ förutsatt att $a \neq 0$. Ekvationen går alltså endast att lösa entydigt för alla högerled om $a \neq 0$, vilket svarar mot att matrisen är inverterbar.

Vi avslutar med några formler: Antag att matriserna A, B båda är inverterbara. Då gäller att

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Dessa lagar följer direkt ur definitionen av invers. T.ex. innebär $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ att A är invers till A^{-1} och vi har t.ex. att $(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I^T = I$ och att $(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}IB = I$.

Egenarbete

Lös uppgifterna **7.7, 7.8, 7.9ab**.