Föreläsning 3

Linjär algebra (FMA420)
Anders Källén

Innehåll: Aspekter på ekvationssystem

Kapitel 6.3, 3.2-3.4, 7.1-7.2

Efter dagens föreläsning måste du

- se vad lösningen på lägredimensionella system “ser ut som”
- veta vad matriser är för något och hur man adderar och multiplicerar dem

Geometriskt innehåll av system i tre variabler

En ekvation $ax + by + cz + d = 0$ definierar en delmängd π av R^3. Hur kan vi beskriva den?

Exempel Ekvationen $x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$ innebär att vi kan låta två variabler variera godtyckligt, t.ex. $x_2 = s,\ x_3 = t$. Detta ger $x_1 = 1 - 2s - t$, vilket vi kan skriva som

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Detta innebär att om (x_1, x_2, x_3) ligger i π så kan vektorn $(x_1 - 1, x_2, x_3)$ skrivas som en linjärkombination av $\vec{u}_1 = (-2, 1, 0)$, $\vec{u}_2 = (-1, 0, 1)$. Dessa är linjärt oberoende (kontrollera) så vi inser att M är ett plan genom punkten $P = (1, 0, 0)$:

BILD

I terminologin ovan gäller att ett koordinatsystem på π ges av $P\vec{u}_1\vec{u}_2$ med koordinaterna (s, t).

Anmärkning Beskrivningen

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0) + s(-2, 1, 0) + t(-1, 0, 1)$$

kallas planets ekvation på parameterform. Parametrarna är s, t, vilka är två. Detta svarar mot att planet är 2-dimensionellt.

En stunds eftertanke ger att varje ekvation $ax + by + cz + d = 0$ definierar ett plan i rummet om bara $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Exempel Bestäm ekvationen för planet genom punkterna $P = (-1, 0, 2), Q = (1, 3, 3), R = (-2, 1, 3)$.

Det är enklast att bestämma ekvationen på parameterform. Som koordinatsystem kan vi då ta $P\vec{u}\vec{v}$ där $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (1, 3, 3) - (-1, 0, 2) = (2, 3, 1)$, $\vec{v} = \overrightarrow{PR} = (-2, 1, 3) - (-1, 0, 2) = (-1, 1, 1)$. Planets ekvation på parameterform blir alltså

$$(x, y, z) = (-1, 0, 2) + s(2, 3, 1) + t(-1, 0, 2).$$

Detta plan kan också skrivas på normalformen $ax + by + cz + d = 0$. Hur gör vi det? Vi skriver om parameterformen som ett system i (s, t) och löser det:

$$\begin{cases} 2s - t = x + 1 \\ 3s + t = y \\ s + t = z - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2s - t &= x + 1 \\ \quad 5t &= -3x + 2y - 3 \\ \quad 0 &= -4x + 6y - 10z + 16 \end{cases}$$

Från detta kan vi utläsa att planets normalform är

$$2x - 3y + 5z - 8 = 0.$$

Anmärkning I kommande förläsningar kommer vi att lära oss alternativa sätt att lösa detta problem som nog ofta är räknemässigt lite enklare. Men då måste vi lära oss mer linjär algebra först.

Vad är då skärningen av två plan?

Exempel Skärningen av planen $x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$ och $2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1$ består av alla (x_1, x_2, x_3) som uppfyller båda ekvationerna samtidigt:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ \quad - x_2 - 4x_3 = -1 \end{cases}$$

Här kan en variabel variera fritt. Om vi sätter $x_3 = t$ får vi att lösningen ges av

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+7t \\ 1-4t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Geometriskt:

BILD

Vi ser att lösningen är en rät linje genom $P = (-1, 1, 0)$ och riktningsvektorn $\vec{u} = (7, -4, 1)$. Ett koordinatsystem på denna linje är $P\vec{u}$.

Ger skärningen av två plan *alltid* en rät linje?

Vad är skärningen av tre plan? Vilka alternativ finns?

Exempel Följande ekvationssystem beskriver skärningen av tre plan:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ \quad - x_2 - 4x_3 = -1 \\ \quad 0 = 0 \end{cases},$$

ett system som har som lösningen den räta linjen i föregående exempel. Hur ser detta ut?

BILD

Egenarbete

Mycket handlar här om att få en geometrisk bild av vad linjär algebra innebär (vilket bara går i låga dimensioner, vilket är en brist). Gör därför uppgifterna **3.10,3.11, 3.13 3.18acd**.

Försök sedan fundera ut hur man bestämmer skärningen mellan en linje och ett plan genom att lösa **3.15**.

Glöm inte att rita en figur som beskriver hur du tänker!

Lite om allmänna linjära ekvationssystem

Ett allmänt linjärt ekvationssystem om p ekvationer i n variabler kan skrivas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n = y_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p1}x_2 + \ldots a_{pn}x_n = y_p \end{cases}$$

Om vi inför vektorerna $A_i = (a_{i1}, \ldots, a_{ip}), i = 1, \ldots, n$ så har vi alltså

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_nA_n = Y$$

där $Y = (y_1, \ldots, y_p)$. Vi kan därför säga att

- Systemet har högst en lösning precis då vektorerna $A_1, \ldots, A_n$ är linjärt oberoende
- Systemet har minst en lösning om Y kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna. Det betyder att de ligger i det rum som spänns upp av $A_1, \ldots, A_n$. Vi betecknar det rum med $V(A)$.

Efter en Gausselimination (ev. efter omordning av ekvationerna) kan vårt system skrivas på trappform

Bild

där vi har n variabler, p ekvationer av vilka r innehåller variabler i vänsterledet. Resten är $0 = 0$ om systemet går att lösa, annars en ekvation $0 = 1$. Vi har nu

- $A_1, \ldots, A_n$ är linjärt oberoende $\Leftrightarrow r = n$
- $A_1, \ldots, A_n$ spänner upp $R^p \Leftrightarrow r = p$
- $A_1, \ldots, A_n$ är en bas för $R^n \Leftrightarrow r = n = p$ (kvadratiskt system)

Anmärkning Talet r kallas systemets rang. Den allmänna lösningen kan uttryckas som en linjärkombination av $p - r$ parametrar om det går att lösa alls. Vilket kräver att $r \leq p$.

Egenarbete

Lös **6.8**

Matriser

Vi kan driva beteckningarna ovan lite längre genom att skriva

$$A = (A_1\ A_2\ \ldots\ A_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Då kan nämligen ekvationssystem kompaktare skrivas

$$AX = Y$$

om vi definierar multiplikationen AX som ovan.

Allmännare kallas rektangulära scheman på formen ovan för matriser och vi pratar om element, rader och kolonner i en matris. Räkneregler

- Om λ är ett tal, står λA för den matris i vilken alla A:s element har multiplicerats med λ
- Två matriser kan adderas genom att man adderar elementen *om de har lika många rader och kolonner*
- Två matriser multipliceras på ett sätt som kan beskrivas på följande sätt. Om A är $1 \times n$-matrisen $A = (a_1 a_2 \ldots a_n)$ och X är $n \times 1$-matrisen ovan, såg gäller att

$$AX = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots a_n x_n$$

(som alltså är ett tal!) Vi får nu elementet på plats (j, k) i en produkt AB genom att på detta sätt multiplicera rad j i A med kolonn k i B.

Exempel Kontrollera att

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 45 \\ -5 & -15 \end{pmatrix}$$

Anmärkning Vi kan multiplicera två matriser om de passar ihop rad och kolonnmässigt - hur? Vad blir resultatet för typ av matris? Ibland kan vi därför bilda AB men inte BA, och när vi kan bilda båda (när är det?) så är det vanligtvis så att

$$BA \neq AB.$$

Anmärkning Läs räknelagarna i kapitel 7.2 själva!

Egenarbete

För att bekanta dig med matrisräkning, gå igenom uppgifterna **7.1–7.3**.